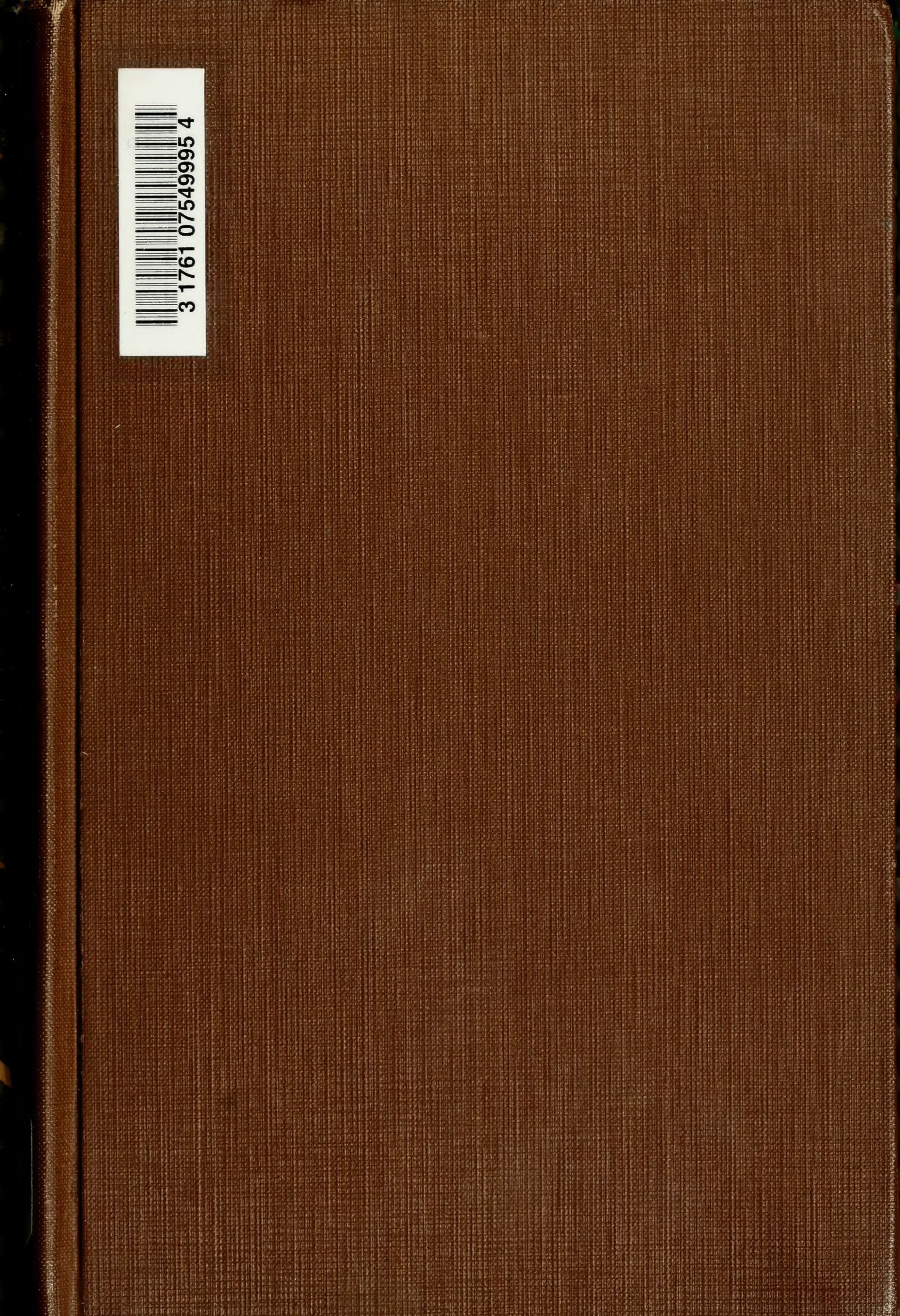

3 1761 07549995 4

INTRODUCTION

A LA

THÉORIE

DES

ÉQUATIONS INTÉGRALES

INTRODUCTION

A LA

THÉORIE

DES

ÉQUATIONS INTÉGRALES

PAR

TRAJAN LALESCO

PROFESSEUR A L'ÉCOLE DES PONTS ET CHAUSSÉES DE BUCAREST

AVEC UNE PRÉFACE

DE

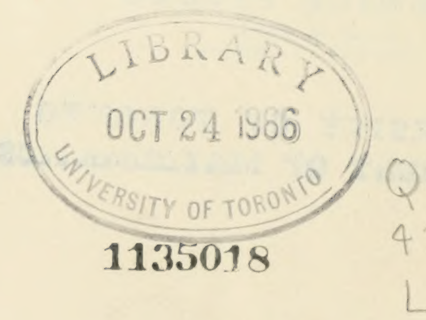
M. ÉMILE PICARD

MEMBRE DE L'INSTITUT
PROFESSEUR A LA SORBONNE

PARIS
LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE A. HERMANN & FILS

LIBRAIRES DE S. M. LE ROI DE SUÈDE
6, RUE DE LA SORBONNE, 6

1912


LIBRARY
OCT 24 1966
UNIVERSITY OF TORONTO

PRÉFACE

—

Depuis longtemps, d'importantes équations fonctionnelles ont fait l'objet des recherches des plus grands géomètres, parmi lesquels on peut citer Laplace, Cauchy, Fourier et Abel. Dans quelques questions, comme la théorie des fonctions elliptiques et celle des fonctions abéliennes, se sont aussi présentées des relations fonctionnelles d'un genre particulier. Mais il n'y avait pas là d'études systématiques, et pendant longtemps les efforts des analystes se sont portés surtout sur le type spécial des équations différentielles, où les problèmes se trouvent mieux délimités et prêtent à des classifications plus faciles. Depuis quinze ans, certaines équations fonctionnelles, où les fonctions inconnues figurent sous un signe d'intégration, ont de nouveau sollicité l'effort des chercheurs. M. Le Roux en 1894 avait déjà repris incidemment sous une forme générale un problème résolu dans un cas particulier par Abel ; peu après, M. Volterra commença une étude approfondie d'une catégorie d'équations fonctionnelles, à laquelle il n'a cessé de travailler et à laquelle il a donné récemment une extension considérable. Mais l'attention fut surtout appelée en 1900 par quelques pages de M. Fredholm, où le géomètre suédois résolvait une équation fonctionnelle généralisant celle que l'on rencontre dans la résolution du problème de Dirichlet au moyen d'un potentiel de double couche. Cette application à une question si célèbre eut un grand retentissement, et on ne tarda pas à reconnaître que de nombreux problèmes de physique mathématique

peuvent se ramener à la même équation. On vit rarement un travail devenir aussi rapidement classique que le mémoire où le professeur de Stockholm développait sa première note. Les résultats essentiels de FREDHOLM avaient la beauté des choses simples et définitives, et aucune érudition préliminaire n'était nécessaire pour pénétrer dans la question. Aussi la mode, qui joue parfois un grand rôle dans l'orientation des recherches scientifiques, s'attacha-t-elle vite à ce type d'équations fonctionnelles, et on remplirait une bibliothèque avec les travaux faits depuis dix ans sur le problème résolu pour la première fois par Fredholm.

Toutes ces études se condenseront peu à peu ; plusieurs publications didactiques sur ces matières ont même déjà paru ou sont en préparation. M. LALESCO, qui dans ces dernières années, a publié d'intéressants résultats sur la question, a pensé que ses réflexions pourraient être utiles à ceux qui désirent aborder l'étude des équations intégrales.

Le petit livre qu'il publie aujourd'hui laisse systématiquement de côté toute application, et n'a en vue que la théorie générale. On y appréciera certainement la simplicité des méthodes choisies ainsi que la clarté de la rédaction qui rendra la lecture de l'ouvrage facile à tous les lecteurs. Les théorèmes essentiels de Fredholm sont présentés d'une manière très élégante, et dans l'étude approfondie du noyau résolvant, l'auteur tire un heureux parti des travaux de M. GOURSAT et de M. HEYWOOD sur les fonctions principales. Le cas du noyau symétrique est traité avec détails, et conduit aux théorèmes fondamentaux de MM. HILBERT et SCHMIDT sur les développements en séries correspondants. Signalons ensuite un excellent chapitre sur les équations intégrales de première espèce, dont la nature est si différente de celle de l'équation de FREDHOLM. Il eut été impossible de faire en quelques pages une étude complète des équations à noyau singulier ; M. LALESCO montre cependant par des exemples quelques-unes des circonstances remarquables qui peuvent alors se présenter.

Viennent enfin des indications sur les équations intégrales d'ordre supérieur et sur les travaux récents de M. Volterra concernant les corps de fonctions permutables. Une bibliographie placée à la fin du volume rendra de grands services.

L'ouvrage de M. Lalesco permettra d'aborder sans peine la lecture des nombreux mémoires qui traitent des applications aux équations différentielles et à la physique mathématique. Il contient les points essentiels de la théorie pure, en laissant toutefois de côté la solution de l'équation de Fredholm par des séries généralisées de Fourier, telle qu'elle a été envisagée par M. Hilbert et ses élèves. On peut d'ailleurs penser que c'est du côté des applications des équations intégrales à la mécanique et à la physique mathématique que doivent maintenant se tourner les chercheurs. C'est là qu'on rencontrera des types nouveaux d'équations, ou que l'attention sera appelée sur certaines particularités des solutions cherchées, particularités faisant partie des données du problème posé. Il y a là sans doute un vaste champ de travaux.

ÉMILE PICARD.

INTRODUCTION A LA THÉORIE
DES ÉQUATIONS INTÉGRALES

INTRODUCTION

1. — Depuis une dizaine d'années, l'étude d'une certaine classe d'équations fonctionnelles a pris un tel développement et s'est montrée si riche en conséquences qu'elle formera certainement dans l'avenir un des plus beaux chapitres de l'analyse. Ce chapitre est en pleine voie de formation ; aussi ai-je cru être utile en donnant un exposé d'ensemble des résultats définitifs obtenus jusqu'à présent et des voies qui restent encore ouvertes aux recherches.

On peut embrasser toutes ces recherches en disant qu'elles traitent des cas particuliers du problème suivant :

Introduisons une *nouvelle opération* effectuée sur la fonction $\varphi(x)$ et définie par l'expression suivante :

$$(1) \qquad \int_{ab} \mathrm{N}(xs)\,\varphi(s)\,ds$$

pourvu que l'intégrale définie ait un sens.

C'est une opération parfaitement déterminée si l'on se donne le chemin d'intégration et la fonction $\mathrm{N}(xy)$ que nous appellerons son « *noyau* ». Cela posé, considérons une relation quelconque entre $\varphi(x)$, ses dérivées de divers ordres et un certain nombre d'opérations telles que (1) et proposons-nous de trouver une fonction satisfaisant à cette relation. C'est un nouveau genre d'équations, plus générales que les équations différentielles puisqu'elles contiennent une opération de plus, qui dans le cas général en est essentiellement différente ; nous les désignerons sous le nom général *d'équations intégrales.*

D'après cette définition, une équation différentielle qui contient une opération intégrale sera une équation intégrale ; l'opération de différentiation s'efface devant la nouvelle opération, absolument de la même manière que la résolution des équations ordinaires, algébriques ou transcendantes, passe en seconde ligne devant l'opération de différentiation ; il n'y a donc aucune ambiguïté à craindre.

Le problème général que nous avons en vue est la résolution des équations intégrales

Historiquement, la première équation intégrale résolue a été

$$(2) \qquad \int_0^x \frac{\varphi(s)\,ds}{(x-s)^\alpha} = F(x) \quad (0 < \alpha < 1)$$

rencontrée par Abel dans un problème élémentaire de mécanique [1].

Longtemps après, un mathématicien russe N. Sonine [2] étudia une équation de la même forme que celle d'Abel mais un peu plus générale.

Sonine épuisait pour ainsi dire la portée de l'artifice de calcul employé par Abel et la question semblait close, lorsque en 1896, M. Vito Volterra dans une suite de notes présentées aux Académies des sciences de Turin et Rome, aborda avec un succès complet et par une méthode directe, qui puisait aux sources mêmes de l'Analyse, l'étude générale de l'équation intégrale.

$$\int_0^x N(xs)\,\varphi(s)\,ds = F(x).$$

Les beaux résultats qu'il obtint, furent immédiatement suivis par un brillant travail de M. Ivar Fredholm en 1900 sur l'équation intégrale

$$\varphi(x) + \int_0^1 N(xs)\,\varphi(s)\,ds = F(x)$$

---

[1] *Crelles Journal. Auflösung einer mechanischen Aufgabe.* 1 Band. 1826. et Œuvres.

[2] *Acta Mathematica* IV. page 170-176 1884.

dont l'importance pour l'Analyse, a été particulièrement mise en évidence par I. Fredholm lui-même, D. Hilbert et E. Picard. Dès lors, les travaux se succèdent sans interruption. Dans une suite de communications présentées à la Société scientifique de Göttingen, D. Hilbert prend comme instrument de démonstration, la résolution d'une certaine classe d'équations linéaires à une infinité de variables, met en évidence par une étude approfondie le rôle de la symétrie du noyau et en étudie des applications importantes.

En même temps, M. E. Picard signalait l'importance de cette équation intégrale en montrant les nombreuses applications dont elle est susceptible dans la Physique Mathématique.

Nous dirons qu'une équation intégrale est *linéaire*, si elle est du premier degré par rapport aux opérations intégrales qu'elle contient.

Les types

$$\int_0^x \mathrm{N}(xs)\,\varphi(s)\,ds = \mathrm{F}(x) \tag{3}$$

$$\varphi(x) + \int_0^x \mathrm{N}(xs)\,\varphi(s)\,ds = \mathrm{F}(x) \tag{3'}$$

dont l'opération intégrale a au moins une limite *variable*, seront appelés, *équations intégrales linéaires de Volterra* ou plus simplement *équations de Volterra* ; l'équation (3) sera dite de première espèce, et (3') de seconde espèce.

Les types

$$\varphi(x) + \int_a^b \mathrm{N}(xs)\,\varphi(s)\,ds = \mathrm{F}(x) \tag{4'}$$

$$\int_a^b \mathrm{N}(xs)\,\varphi(s)\,ds = \mathrm{F}(x) \tag{4}$$

seront appelées, *équations intégrales linéaires de Fredholm* ou plus simplement *équations de Fredholm* ; d'une façon analogue (4) et (4') seront désignées respectivement comme équations de première et seconde espèce.

Ces types caractérisent les nouveaux éléments analytiques ; autour d'eux on peut facilement construire la théorie des autres

cas linéaires rencontrés dans les applications et qui ont été considérés successivement par divers auteurs.

Nous divisons l'exposé en trois parties. Dans la première partie nous développons la théorie de l'équation de Volterra ordinaire.

La seconde partie sera consacrée à l'équation intégrale de Fredholm et enfin, dans la troisième, nous donnerons des indications générales sur les équations intégrales singulières et les équations non linéaires, dont l'étude, outre un intérêt d'extension logique, paraît aussi être utile dans diverses recherches modernes.

A la fin de cet ouvrage on trouvera une bibliographie détaillée des publications relatives à la *théorie* des équations intégrales.

PREMIÈRE PARTIE

L'ÉQUATION DE VOLTERRA

I. — TRAVAUX DE M. VOLTERRA

1. — Les travaux de M. V. Volterra ont paru depuis 1896 dans quatre notes présentées à l'Académie de Turin ([1]) deux à celle de Rome ([2]) et un exposé d'ensemble inséré dans les « Annali di Matematica ([3]) ». Il est essentiel de mettre d'abord en évidence l'idée qui a guidé M. V. Volterra dans ses recherches ; dans ce chapitre il ne sera question que des fonctions *finies* et *intégrables*.

Supposons les variables *réelles* et limitées dans un intervalle fini que l'on peut supposer être l'intervalle (o — 1). Prenons les points de division.

$$(1) \qquad \frac{1}{n} \quad \frac{2}{n} \quad \frac{3}{n} \ldots\ldots \frac{n-1}{n}$$

et exprimons que l'équation

$$(2) \qquad \int_0^x N(xs)\,\varphi(s)\,ds = F(x)$$

est vérifiée pour ces points, en remplaçant l'intégrale par les sommes approchées correspondant aux points de division (1) ;

---

(1) V. Volterra, *Sulla inversione degli integrali definiti.* (Atti della reale Acc. delle Scienze di Torino) 12 Janvier, 8 Mars, 26 Avril 1896, page 311, 400, 557, 693.

(2) V. Volterra, *Rendiconti della reale Accademia des Lincei* (1er Sem. 1896, page 177, 289).

(3) V. Volterra, *Sopra alcuni questioni di inversione di integrali definiti* (Ann. di Mat) (2e Série t. 25 1897, page 163).

ceci nous donne les équations approchées

$$
(3) \qquad \begin{cases}
\frac{1}{n} N_{11}\,\varphi_1 = F_1 \\
\frac{1}{n} [N_{21}\,\varphi_1 + N_{22}\,\varphi_2] = F_2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\frac{1}{n} [N_{n1}\,\varphi_1 + \ldots\ldots + N_{nn}\,\varphi_n] = F_n.
\end{cases}
$$

en posant pour abréger $N_{pq} = N\left(\frac{p}{n}, \frac{q}{n}\right)$, $\varphi_p = \varphi\left(\frac{p}{n}\right)$ et $F_p = F\left(\frac{p}{n}\right)$.

Nous obtenons ainsi un système très simple de n équations à n inconnues, qui nous permet de calculer *successivement* les valeurs approximatives de notre fonction inconnue aux points (1).

L'exactitude de ces valeurs croît avec n; en passant à la limite, nous obtenons une infinité d'inconnues qui sont les diverses valeurs de $\varphi(x)$, dans l'intervalle (0 — 1).

Une fois le résultat trouvé, une vérification est nécessaire. Cette méthode constructive présente une analogie complète avec celle qui conduit à la notion d'intégrale où de même une vérification est nécessaire. Elle nous découvre deux caractères essentiels du problème :

La présence d'un *mécanisme d'approximations successives* et l'introduction de *la condition* $N(xx) \neq 0$.

Nous ne connaissons pas dans tous les détails les méthodes de M. V. Volterra qui s'est borné à développer des vérifications. Son procédé parfois laborieux donne un cachet mystérieux à certains de ses résultats ; s'il a le don de ressusciter les pratiques des anciens analystes, il n'est pas pour contenter complètement l'esprit.

Nous emploierons directement la méthode des approximations successives, en suivant les indications de M. E. Picard [1].

II. — LE THÉORÈME DE M. VOLTERRA

2. Prenons les variables réelles et supposons que le noyau et $F(x)$ sont des fonctions une fois dérivables dans un certain in-

---

[1] T. Lalesco, *Sur l'équation de Volterra* Jl. de Math. pures et appl. 1908.

tervalle (o,a). En dérivant (2), nous obtenons

$$(4)\qquad N(xx)\varphi(x) + \int_0^x N'_x(xs)\varphi(s)\,ds = F'(x)$$

Si $N(xx)$ *ne s'annulle pas dans l'intervalle* oa, on peut diviser par $N(xx)$ et nous obtenons ainsi une équation de la forme

$$(5)\qquad \varphi(x) + \int_0^x N_1(xs)\varphi(s)\,ds = F_1(x)$$

Cette forme est très favorable pour l'application des approximations successives ; introduisons un paramètre λ devant l'intégrale du premier membre et cherchons à satisfaire à (5) par un développement de la forme

$$(6)\quad \varphi(x) = \varphi_0(x) + \lambda\varphi_1(x) + \lambda^2\varphi_2(x) + \ldots + \lambda^n\varphi_n(x) + \ldots$$

$\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$ ... $\varphi_n(x)$ étant les diverses approximations qu'il s'agit d'obtenir. On a, par identification, les équations suivantes

$$(7)\qquad \begin{cases} \varphi_0(x) = F_1(x) \\ \varphi_1(x) = -\displaystyle\int_0^x N_1(xs)\varphi_0(s)\,ds \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_n(x) = -\displaystyle\int_0^x N_1(xs)\varphi_{n-1}(s)\,ds \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

qui servent à déterminer d'une façon successive, les approximations cherchées.

La série des approximations (7) converge uniformément dans l'intervalle (oa). En effet, soient M et N les modules maxima de $F_1(x)$ et $N_1(xs)$ dans cet intervalle ; on a évidemment les inégalités

$$|\varphi_0(x)| < M$$
$$|\varphi_1(x)| < MNx$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$|\varphi_n(x)| < \frac{MN^n x^n}{n!}$$

ce qui montre bien que la série (6) représente une fonction entière de λ, d'ordre au plus égal à 1 ; elle converge donc absolument et uniformément dans l'intervalle oa.

La série (6) étant uniformément convergente par rapport à x, l'intégrale qui figure dans l'équation (5) a un sens parfaitement déterminé ; d'autre part, cette série satisfait formellement à l'équation (5) et est absolument convergente. Il résulte de là que $\varphi(x)$ est une solution finie et bien déterminée de l'équation (5).

Elle est aussi *la seule* qui soit finie ; en effet, s'il y avait une seconde, l'équation (5) sans second membre

$$(8) \qquad \varphi(x) + \int_0^x N_1(xs)\,\varphi(s)\,ds = 0$$

aurait une solution non identiquement nulle, ce qui est impossible car on déduit de (7) et (8) par soustraction

$$\varphi(x) - \varphi_n(x) = - \int_0^x N_1(xs)\,[\varphi(s) - \varphi_{n-1}(s)]\,ds.$$

On obtient donc des inégalités identiques aux précédentes, où l'on doit seulement remplacer $\varphi_n(x)$ par $\varphi(x) - \varphi_n(x)$.

En vertu du raisonnement précédent, il résulte que l'expression

$$\lambda^n [\varphi(x) - \varphi_n(x)]$$

est le terme général d'une série, fonction entière de λ, et par conséquent on a :

$$\lim_{n=\infty} [\varphi(x) - \varphi_n(x)] = 0$$

d'où

$$\varphi(x) = \lim_{n=\infty} \varphi_n(x) = 0.$$

On remonte ensuite de l'équation (5) ou (4) à l'équation primitive par une intégration ce qui nous donne

$$(9) \qquad \int_0^x N(xs)\,\varphi(s)\,ds = F(x) - F(0).$$

L'équation (2) n'admet donc pas la solution $\varphi(x)$ que si $F(o) = o$, condition qui est nécessaire pour l'existence d'une solution finie et qui est d'ailleurs aussi, comme nous le voyons, suffisante [1].

Nous obtenons ainsi le théorème suivant :

Si $N(xy)$ *et* $F(x)$ *sont des fonctions une fois dérivables par rapport à* x *dans l'intervalle* (oa) *et si* $N(xx) \neq o$ *et* $F(o) = o$, *l'équation de Volterra.*

$$\int_0^x N(xs)\varphi(s)ds = F(x)$$

admet une seule solution finie et continue dans cet intervalle.

3. — Si nous considérons l'équation de Volterra de *seconde espèce*

(10) $$\varphi(x) + \lambda \int_0^x N(xs)\varphi(s)ds = F(x)$$

les conditions restrictives du théorème précédent ne sont plus évidemment nécessaires. Cette équation apparaît donc comme la plus simple ; nous avons toutefois conservé la terminologie de M. D. Hilbert pour éviter toute confusion.

III. — LA FORMULE DE M. VOLTERRA ; NOYAU RÉSOLVANT

4. — On peut écrire plus simplement $\varphi(x)$ en procédant de la manière suivante :

On a, en considérant l'équation de seconde espèce (10) :

$$\varphi_0(x) = F(x)$$

$$\varphi_1(x) = -\int_0^x N_1(x\sigma)\,F(\sigma)d\sigma$$

$$\varphi_2(x) = (-1)^2 \int_0^x N_1(xs)ds \int_0^s N_1(s\sigma)\,F(\sigma)d\sigma$$

---

(1) Ce théorème a été établi pour la première fois, par J. Le Roux dans sa thèse de Doctorat : *Sur les intégrales des équations linéaires aux dérivées partielles du 2e ordre à 2 variables indépendantes* (p. 19-22), 1894, à l'aide de la méthode des approximations successives.

ou appliquant la formule de Dirichlet

$$\varphi_2(x) = (-1)^2 \int_0^x F(\sigma)d\sigma \int_0^x N(xs)\,N(s\sigma)ds = \int_0^x N_1(x\sigma)\,F_1(\sigma)d\sigma$$

en posant

$$N_1(xy) = \int_y^x N(xs)\,N(sy)\,ds.$$

En général

$$\varphi_p(x) = (-1)^p \int_0^x N(xs)\,ds \int_0^s N_{p-2}(s\sigma)\,F(\sigma)\,d\sigma$$

$$= (-1)^p \int_0^x F(\sigma)\,d\sigma \int_0^x N(xs)\,N_{p-2}(s\sigma)\,ds$$

$$= (-1)^p \int_0^x N_{p-1}(x\sigma)\,F(\sigma)\,d\sigma$$

où l'on a, d'une façon générale

$$N_p(xy) = \int_y^x N_1(xs)\,N_{p-1}(sy)\,ds$$

Si donc nous posons :

$$\mathfrak{N}(xy\lambda) = N(xy) - \lambda N_1(xy) + \ldots + (-1)^p \lambda N_p(xy) + \ldots$$

On pourra écrire la solution de (10) sous la forme

(11) $$\varphi(x) = F(x) - \lambda \int_0^x \mathfrak{N}(xs\lambda)\,F(s)\,ds.$$

Elle se présente sous une forme analogue au premier membre de (5) ; nous dirons pour cela que $\mathfrak{N}(xy\lambda)$ est le *noyau résolvant de l'équation* (10).

Les noyaux $N_p(xy)$ jouent aussi un rôle important dans la théorie des équations intégrales ; on les appelle *les noyaux itérés de divers ordres.*

On peut résumer les résultats obtenus, dans le théorème suivant :

L'équation de Volterra de seconde espèce (10) *a une seule solution finie et continue qui est donnée par la formule* (11).

Cette solution est une fonction entière de λ d'ordre au plus égal à un.

L'équation de Volterra de première espèce, ne peut être résolue dans le domaine fini et réel, que sous certaines conditions.

IV. — LA LIAISON ENTRE L'ÉQUATION DE VOLTERRA ET LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES

5. — Il existe entre l'équation de Volterra et les équations différentielles linéaires un lien très intime, qu'il est utile de mettre en évidence.

On peut, d'abord, *réduire toute équation différentielle linéaire à une équation de Volterra.* Considérons en effet l'équation d'ordre n :

$$(12) \qquad \frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \dots + a_n(x)y = f(x)$$

et prenons comme fonction inconnue à la place de y, la dérivée d'ordre le plus élevé :

$$\frac{d^n y}{dx^n} = z.$$

On aura :

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^n} = \int_0^x z dx + C_1$$

$$\dots\dots\dots$$

jusqu'à :

$$y = \int_0^x z dx^n + C_1\frac{x^{n-1}}{n-1!} + C_2\frac{x^{n-2}}{n-2!} + \dots + C_n$$

ce qui transforme (12) en :

$$(13) \quad z + a_1(x)\int_0^x z dx + \dots + a_n(x)\int_0^x z dx^n = f(x) + \sum_{p=1}^{n} C_p f_p(x)$$

en posant en général

$$f_p(x) = a_p(x) + \frac{x}{1}a_{p+1}(x) + \dots + \frac{x^{n-p}}{n-p!}a_n(x).$$

Il suffit maintenant d'appliquer la formule bien connue :

$$\int_0^x \varphi(s)\,ds^n = \int_0^x \frac{(x-s)^{n-1}}{n-1\,!}\varphi(s)\,ds.$$

pour tomber sur l'équation de Volterra :

$$(14)\quad z(x) + \int_0^x \left[a_1(x) + a_2(x)(x-s) + \ldots + a_n(x)\frac{(x-s)^{n-1}}{n-1\,!}\right]z(s)\,ds$$
$$= f(x) + \sum C_p f_p(x).$$

On a supposé, bien entendu, que l'origine est un point régulier pour les coefficients $a_i(x)$. Remarquons en passant, que toutes les propriétés élémentaires des équations différentielles linéaires avec ou sans second nombre, découlent d'une façon immédiate des résultats précédents.

Pour que le second membre de (14) ait une valeur parfaitement déterminée, il faut que les constantes C_i aient des valeurs données. Donc inversement, la résolution d'une équation de Volterra (14) est équivalente à la résolution *d'un problème de Cauchy* pour l'équation différentielle linéaire (12). L'unicité de la solution dans la théorie de l'équation de Volterra, correspond au fait que le problème de Cauchy n'admet, pour un point régulier, qu'une seule solution.

6. — Nous obtenons un résultat intéressant, qui nous rendra compte à un certain point de vue, de la nature analytique de l'équation de Volterra en faisant $n = \infty$ dans l'équation différentielle (13). Nous obtenons ainsi l'équation différentielle linéaire *d'ordre infini*

$$z + a_1(x)\int_0^x z\,dx + a_2(x)\int_0^x z\,dx^2 + \ldots + a_n(x)\int_0^x z\,dx^n + \ldots$$
$$= f(x) + \sum_{p=1}^{\infty} c_p f_p(x)$$

où l'on a

$$f_p(x) = \sum_{r=0}^{\infty} a_{p,r}(x)\frac{x^r}{r!}$$

qui est équivalente à l'équation de Volterra :

$$(15)\quad z+\int_0^x\left[a_1(x)+a_2(x)(x-s)+\ldots+\frac{a_n(x)(x-s)^{n-1}}{n-1\,!}+\ldots\right]\varphi(s)ds$$
$$=f(x)+\sum_{p=1}^{\infty}c_p f_p(x).$$

Supposons que les fonctions $a_p(x)$ soient toutes finies dans un intervalle (oa) et que, d'une façon plus précise, on ait :

$$a_p(x) < A \qquad (p \text{ quelconque}).$$

Dans ces conditions, on a évidemment :

$$|f_p(x)| < Ae^{Ax}.$$

Si donc la série :

$$\sum_{p=1}^{\infty} c_p$$

est convergente, la somme du second membre de (15) représente une série absolument et uniformément convergente dans l'intervalle (oa).

Remarquons enfin de même, que la série donnant le noyau de (15) est aussi une série uniformément et absolument convergente dans le même intervalle.

Ce simple passage à la limite nous montre donc que, dans certains cas, l'équation de Volterra est équivalente à la résolution d'un problème de Cauchy pour une équation différentielle linéaire d'ordre infini, ce qui suffit pour montrer le rôle et la nature de ce nouvel instrument analytique.

V. — LES ÉQUATIONS DE VOLTERRA A PLUSIEURS VARIABLES INDÉPENDANTES

7. — Les équations de Volterra à plusieurs variables indépendantes sont aussi importantes à cause de leurs applications dans la théorie des équations aux dérivées partielles, à caracté-

ristiques réelles. Nous étudierons le type suivant :

$$(16)\quad \varphi(xy) + \int_0^x A(xy\,;\,s)\,\varphi(sy)\,ds + \int_0^y B(xy\,;\,s)\,\varphi(xs)\,ds$$
$$+ \int_0^x\int_0^y C(xy\,;\,s,\,t)\,\varphi(st)\,dsdt = F(xy)$$

qui correspond à l'équation de seconde espèce des paragraphes précédents [1].

Les fonctions $A(xyz)$ $B(xyz)$ et $C(xyzt)$ sont par hypothèse *finies* $< M$, $F(xy) < F$ *et intégrables* dans un certain domaine D de leurs arguments. Pour trouver une solution de l'équation (16) nous appliquerons la méthode des approximations successives en prenant :

$$(17)\quad \begin{cases} \varphi_1(xy) = F(xy), \\ \varphi_2(xy) = -\int_0^x A(xys)\,\varphi_1(sy)\,ds - \int_0^y B(xys)\,\varphi_1(xs)\,ds \\ \qquad - \int_0^x\int_0^y C(xyst)\,\varphi_1(st)\,dsdt = D[\varphi_1(xy)], \\ \cdots\cdots\cdots \\ \varphi_n(xy) = D[\varphi_{n-1}(xy)] \end{cases}$$

On aura, dans le rectangle (1) de côtés $o\alpha$ et $o\beta$ compris dans le domaine D :

$$|\varphi_1(xy)| < F$$
$$|\varphi_2(xy)| < MF(x + y + xy) < MF(\alpha + \beta + \alpha\beta)$$
$$|\varphi_3(xy)| < M^2F(\alpha + \beta + \alpha\beta)(x + y + xy) < FM^2(\alpha + \beta + \alpha\beta)^2$$

et en général :

$$|\varphi_n(xy)| < FM^n(\alpha + \beta + \alpha\beta)^n.$$

Il résulte de là, que la série des approximations converge régulièrement [2] dans le rectangle (α, β) si l'on prend α et β

---

[1] Nous écrirons, pour abréger, $A(xyz)$ au lieu de $A(x, y, z)$.

[2] Nous disons pour abréger « régulièrement » à la place de « absolument et uniformément ».

suffisamments petits pour que l'on ait :

$$M(\alpha + \beta + \alpha\beta) < 1.$$

Nous obtenons ainsi une solution qui est d'ailleurs la seule dans le rectangle (1) en vertu d'un raisonnement identique à celui indiqué à la page 8.

Pour *prolonger* cette solution dans tout le domaine D, considérons le rectangle (2) situé à la droite du rectangle (1) et ayant les mêmes dimensions que lui. Si l'on fait le changement de variables $x = \alpha + x'$, $y = y'$, l'équation (16) pourra être mise sous la forme :

$$(18) \quad \varphi(x'y') + \int_0^{x'} A(x'y's)\,\varphi(sy')\,ds + \int_0^{y'} B(x'y's)\,\varphi(x's)\,ds$$
$$+ \int_0^{x'}\int_0^{y'} C(x'y'st)\,\varphi(st)\,ds dt = F + \Phi$$

le premier membre *ayant conservé exactement la même forme qu'en* (16) et Φ étant une fonction facile à déterminer ; elle contient en outre les valeurs de $\varphi(xy)$ dans le rectangle (1) qui nous sont maintenant connues.

On pourra donc appliquer le même mécanisme d'approximations successives, en remplaçant seulement F par $F + \Phi$; les approximations ainsi obtenues convergeront sûrement dans le rectangle (2) puisque le premier membre de (16) étant resté invariable, la constante M est restée la même. On pourra donc, au bout d'un nombre *fini* d'opérations, *remplir tout le domaine* D, avec ce rectangle de dimensions invariables $(\alpha\beta)$; nous obtenons ainsi le théorème suivant :

L'équation (16) *a une seule solution finie dans tout le domaine où les fonctions* $A(xyz)$ $B(xyz)$ $C(xyzt)$ *et* $F(xy)$ *sont finies et intégrables* (1).

8. — M. V. Volterra considère aussi le cas de l'équation de première espèce :

$$(19) \qquad \int_0^{x}\int_0^{y} N(xy\,;\,st)\,\varphi(st)\,ds dt = F(xy).$$

---

(1) Cette méthode est due à M. E. Picard.

Posons :

$$N(xyst) = N(xy) + N_1(xys)(x-s) + N_2(xyt)(y-t) + N_3(xyst)(x-s)(y-t).$$

L'équation (19) s'écrit alors :

$$N(xy)\int_0^x\int_0^y \varphi(st)\,ds\,dt + \int_0^x\int_0^y N_1(xys)(x-s)\varphi(st)\,ds + \int_0^x\int_0^y N_2(xys)(y-t)\varphi(st)\,dt + \int_0^x\int_0^y N_3(xyst)(x-s)(y-t)\varphi(st)\,ds\,dt = F(xy).$$

En prenant comme inconnue la fonction :

$$\varphi_1(xy) = \int_0^x\int_0^y \varphi(st)\,ds\,dt$$

l'équation (19) pourra se mettre sous la forme :

$$N(xy)\varphi_1(xy) + \int_0^x N_1(xys)\varphi_1(sy)\,ds + \int_0^y N_2(xys)\varphi_1(xs)\,ds + \int_0^x\int_0^y N_3(xyst)\varphi_1(st)\,ds\,dt = F(xy).$$

En divisant par $\overline{N}(xy)$ on obtient donc une équation de seconde espèce.

Puisque $\varphi_1(0,0) = 0$, il est nécessaire aussi que $F(0,0) = 0$; de même la condition $\overline{N}(xy) \equiv N(xy;\,xy) \not\equiv 0$ intervient donc aussi comme condition nécessaire et suffisante pour que les coefficients de l'équation de deuxième espèce soient finies. Nous retrouvons donc, d'une autre manière, les mêmes particularités qu'à l'équation de Volterra à une seule variable [1].

---

[1] Cette méthode peut aussi être appliquée dans le cas d'une seule variable indépendante.

VI. — LES SYSTÈMES D'ÉQUATIONS DE VOLTERRA

9. — La méthode des approximations successives permet tout aussi simplement de traiter un système de n équations linéaires de Volterra de seconde espèce, à n fonctions inconnues. Nous appelerons ainsi un système tel que :

$$\varphi_i(x) + \sum_{p=1}^{n} \int_0^x \mathrm{A}_{ip}(xs)\, \varphi_p(s)\, ds = f_i(x) \qquad (i = 1, \dots n).$$

L'application de la méthode est évidente ; les premières approximations seront $\varphi_{i0}(x) = f_i(x)$ et on a comme équations de récurrence :

$$\varphi_{ik}(x) = -\sum_{p=1}^{n} \int_0^x \mathrm{A}_{ip}(xs)\, \varphi_{pk-1}(s)\, ds \qquad (i = 1, \dots n).$$

Le même procédé, déjà plusieurs fois employé, montre que les séries des approximations convergent régulièrement dans tout le domaine d'existence des coefficients $\mathrm{A}_{ik}(xy)$.

10. — On peut réduire immédiatement tout système d'équations différentielles linéaires d'ordre fini du type :

$$\frac{dz_i}{dx} + \sum_{p=1}^{n} a_{ip}(x)\, z_p(x) = f_i(x) \qquad (i = 1, \dots n)$$

à un système d'équations de Volterra en prenant comme inconnues $\frac{dz_i}{dx} = u_i$. On peut même considérer des systèmes d'équations linéaires d'ordre infini auxquels le même procédé est applicable, pourvu que les conditions initiales assurent la convergence des premiers membres des équations considérées.

VII. — REMARQUES FINALES

11. — Ce qui précède, montre clairement la puissance de l'admirable instrument analytique qui est constitué par la méthode des approximations successives et sa fécondité variée dans toutes

les questions d'existence posées sur les équations différentielles *linéaires* et les équations intégrales *linéaires* qui en constituent, comme on l'a vu, une véritable généralisation.

Les équations intégrales que nous venons de traiter, sont des équations *régulières* ; un chapitre spécial est consacré aux équations intégrales *singulières*, où nous considérons simultanément les équations singulières de Volterra et de Fredholm.

DEUXIÈME PARTIE

CHAPITRE PREMIER

L'ÉQUATION DE FREDHOLM

I. — LES FORMULES DE M. FREDHOLM

1. — L'équation de Fredholm de seconde espèce fournit un exemple très instructif de découverte mathématique ; elle en a tous les traits essentiels, tant par la nouveauté du résultat que par la hardiesse du passage à la limite, considéré avec juste raison par MM. G. Darboux et E. Picard, comme un des plus beaux de l'Analyse. Il est donc intéressant d'esquisser, en ses lignes générales, la marche de cette mémorable découverte.

Prenons l'équation

$$(1) \qquad \varphi(x) + \lambda \int_0^1 N(xs)\varphi(s)\,ds = f(x)$$

avec les points de division :

$$(2) \qquad \frac{1}{n} \quad \frac{2}{n} \quad \frac{3}{n} \cdots \frac{n-1}{n}$$

et remplaçons l'intégrale de (1) par la somme approchée correspondant aux points de division (2), ce qui nous donne l'équation approchée

$$(3) \quad \varphi(x) + \lambda\left[N\left(x, \frac{1}{n}\right)\varphi_1 + N\left(x, \frac{2}{n}\right)\varphi_2 + \ldots + N\left(x, \frac{n}{n}\right)\varphi_n\right] = f(x).$$

Exprimons que (3) est vérifiée aux points de division (2); nous obtenons les n équations linéaires

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{l} \varphi_1 + \lambda[N_{11}\varphi_1 + N_{12}\varphi_2 + \ldots + N_{1n}\varphi_n] = f_1 \\ \varphi_2 + \lambda[N_{21}\varphi_1 + N_{22}\varphi_2 + \ldots + N_{2n}\varphi_n] = f_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_n + \lambda[N_{n1}\varphi_1 + N_{n2}\varphi_2 + \ldots + N_{nn}\varphi_n] = f_n \end{array}\right.$$

Les racines de ce système sont des fractions rationnelles en λ dont le dénominateur commun est :

$$(5)\qquad D_n(\lambda) = \begin{vmatrix} 1+\lambda N_{11} & \lambda N_{12} \ldots & \lambda N_{1n} \\ \lambda N_{21} & 1+\lambda N_{21} \ldots & \lambda N_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda N_{n1} & \lambda N_{n2} \ldots & 1+\lambda N_{nn} \end{vmatrix}$$

Si donc l'équation intégrale (1) est remplacée par l'équation approchée (3), la théorie des équations linéaires nous donne les résultats suivants :

a) L'équation (3) est vérifiée aux points (2) *pour toute valeur de* λ *qui n'annulle pas le déterminant* (5); les expressions des φ_k sont des *fractions rationnelles de* λ ayant pour dénominateur commun $D_n(\lambda)$;

b) Pour les racines de $D_n(\lambda)$, c'est l'équation (3) *sans second membre*, qui est vérifiée aux points (2);

c) Pour que l'équation (3) avec second membre, soit vérifiée dans ce dernier cas, il faut et il suffit que les déterminants caractéristiques attachés au mineur principal de $D_n(\lambda)$ soient tous nuls.

Pour passer de l'équation approchée (3) à l'équation (1), il faut faire $n = \infty$; le système (4) devient alors un système d'équations linéaires à une infinité de variables, le déterminant $D_n(\lambda)$ un déterminant infini et les inconnues φ_k constituent la totalité des valeurs de la fonction inconnue continue $\varphi(x)$ dans l'intervalle (01).

C'est le mérite de M. I. Fredholm d'avoir fait avec un succès complet, ce passage à la limite et d'avoir démontré que les trois propriétés mentionnées plus haut, se conservent à l'infini. Son

premier mémoire paru en 1900 ([1]) a été présenté à l'Académie de Stockholm, il a été suivi en 1902 de deux notes présentées à l'Académie des Sciences de Paris ([2]) en 1903 et d'un travail d'ensemble publié dans le tome XXVII « *Niels H. Abel in memoriam* » des Acta Mathématica ([3]).

Le procédé de M. I. Fredholm est *direct*, il prend le dévement connu de $D_n(\lambda)$ suivant les puissances de λ et démontre qu'en faisant $n = \infty$, on obtient une fonction $D(\lambda)$ *entière en* λ; des considérations très simples de la théorie des déterminants infinis, rendaient très probable ce résultat fondamental que M. Fredholm démontra rigoureusement à l'aide d'un théorème important dû à M. J. Hadamard. Les séries qu'il obtint sont d'une rare élégance de maniement et resteront certainement classiques.

2. — Le petit mémoire de 1900 attira immédiatement l'attention de M. D. Hilbert, le savant professeur de Göttingen qui s'y consacra pendant plusieurs années, autant par ses recherches personnelles que par son enseignement. Le point de départ de M. D. Hilbert a été la remarque suivante :

Le déterminant $D_n(\lambda)$ est le discriminant de la forme quadratique

$$(6) \qquad \sum_{p=1}^{n} x_p^2 + \lambda \sum_{p,q=1}^{n} N_{pq} x_p x_q \qquad (N_{pq} = N_{qp}).$$

Dès lors, toute la belle théorie des formes quadratiques et bilinéaires que la science doit à Weierstrass, Sylvester, Kronecker et Frobenius, devait porter ses fruits par un passage à l'infini ; c'est ainsi qu'apparaît immédiatement le rôle de la symétrie du noyau, cas auquel s'attacha principalement M. D.

([1]) I. Fredholm, *Sur une nouvelle méthode pour la résolution du problème de Dirichlet* (10 janvier 1900).

Ofversitg af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar, 1900, n° 1. Stockholm.

([2]) I. Fredholm, *Sur une classe de transformations rationnelles.* C. R. Paris, t. 134, 1902 I, p. 219 et *Sur une classe d'équations fonctionnelles.* C. R., même volume, p. 1561.

([3]) I. Fredholm, *Sur une classe d'équations fonctionnelles.* Acta Math. 27, 1903, p. 365-390.

Hilbert et son école. La réduction de (6) à la forme canonique amena M. D. Hilbert à prendre chaque équation intégrale comme source d'une suite de fonctions orthogonales et à rattacher ainsi l'étude du développement des fonctions arbitraires suivant une suite de fonctions orthogonales, à la théorie des équations intégrales. Les travaux de M. D. Hilbert ont paru dans six communications faites à la Société Scientifique de Göttingen [1], ce sont la 1re, 4me et 5me qui traitent de la théorie pure ; les autres sont consacrées aux applications. Tous les résultats théoriques, trouvés par M. D. Hilbert ont été retrouvés et complétés à l'aide d'une méthode directe par un de ses élèves, M. E. Schmidt, qui, dans son *Inaugural Dissertation* [2] donna un exposé très élégant, rapidement répandu et utilisé, des principaux résultats théoriques concernant l'équation intégrale à noyau symétrique.

Le cas du noyau non symétrique, traité aussi par MM. D. Hilbert et E. Schmidt, appelait de nouvelles recherches. Déjà en 1903, dans un travail très remarquable, M. J. Plemelj [3] découvre les suites de fonctions biorthogonales, dont les fonctions orthogonales ne sont qu'un cas particulier. Ces fonctions ont été retrouvées par M. B. Heyvood [4] à l'aide d'une méthode d'identification très simple, mais c'est à M. E. Goursat que l'on doit un travail fondamental [5] où apparaissent tous les éléments essentiels du problème ; la notion de noyaux orthogonaux qui résulte de l'étude approfondie du noyau résolvant, est l'instrument de recherche commode qui rend inutile

---

(1) D. Hilbert, *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der Integralgleichungen* (Gött. Nachrichten. Erste Mitteilung 5 mars 1904), 2te mit. (25 juin 1904), 3te et 4te (1905), 5te (1906) et 6te (1910).

(2) E. Schmidt, *Entwicklung willkürlicher Functionen nach Systemen vorgheschriebener.* (Juillet 1905) et *Math. Annalen*, Bd. 63, p. 433-476. 1907.

(3) J. Plemelj, *Fredholmsche Functionalgleichung. in der Potential theorie* (Wien, 12 mars 1903) et *Zur theorie der Fredholmschen Functionalgleichung.* (Monatshefte für Math. und Physik. XV, 1903, p. 93-128).

(4) B. Heywood, *Sur l'équation fonctionnelle de Fredholm*, 1re partie. (J. de math. pures et appliquées, 1908).

(5) E. Goursat, *Recherches sur les équations intégrales linéaires.* (Ann. de la Fac. de Toulouse, t. 10, 2e série, 1908, p. 5-98). Voir aussi le travail de M. H. Mercer, *Plemelj's Canonical form.* (Transc. Cambr. Phil. Soc. 21, 1908, p. 129.

tout passage à la limite et permet de traiter directement l'équation intégrale dans le cas général.

Nous suivrons une méthode mixte où nous utiliserons les travaux de MM. I. Fredholm, E. Goursat et B. Heywood. Il ne sera question dans cette partie, que des noyaux et fonctions finies et intégrables.

II. — LE PREMIER THÉORÈME DE M. I. FREDHOLM

3. L'élément analytique de la solution. — Considérons l'équation intégrale :

$$(7)\qquad \varphi(x) - \lambda \int_a^b N(xs)\varphi(s)\,ds = f(x). \quad (N(xy) < N)$$

Si nous appliquons, comme dans le cas de l'équation de Volterra, la méthode des approximations successives, nous obtenons la série :

$$(8)\quad \varphi(x) = f(x) - \lambda \int_a^b N(xs)f(s)\,ds + \lambda^2 \int_a^b N_1(xs)f(s)\,ds + \dots$$
$$+ (-1)^p \lambda^p \int_a^b N_{p-1}(xs)f(s)\,ds + \dots$$

en posant comme dans le cas de l'équation de Volterra :

$$(9)\quad N_p(xy) = \int_a^b \cdots \int_a^b N(xs_1)N(s_1s_2)\dots N(s_py)\,ds_1ds_2\dots ds_p.$$

Nous désignerons l'expression (9) sous le nom de *noyau itéré* d'ordre p. La série (8) converge régulièrement dans l'intervalle ab, *pour* λ *suffisamment petit*; en effet, elle admet comme majorante la série $\sum_{p=0}^{\infty} N^p\lambda^p$, ce qui nous montre que (8) converge complètement si $\lambda < \frac{1}{N}$. Dans ces conditions, nous pourrons écrire (8) sous la forme [1]

$$(10)\qquad \varphi(x) = f(x) - \lambda \int \mathfrak{N}(xs\lambda)f(s)\,ds$$

---

(1) Dans ce chapitre, nous supprimerons pour facilité d'écriture, les limites a et b.

en posant

$$(11)\quad \mathfrak{N}(xy\lambda) = N(xy) - \lambda N_1(xy) + \dots + (-1)^p\lambda^p N_{p-1}(xy) + \dots$$

qui sera appelé le *noyau résolvant* de l'équation intégrale (7).

La forme (10) de la solution nous fournit une remarque importante : Le caractère analytique de la solution (10) par rapport à λ, dépend en premier lieu de celui du noyau résolvant. L'étude de la solution (10) revient donc à celui du noyau résolvant de l'équation intégrale ; le second membre $f(x)$ n'intervient pas, comme on le verra par la suite.

4. Les équations intégrales du noyau résolvant. — Au lieu d'étudier directement la série (11), remarquons qu'on peut en déduire les relations :

$$\begin{aligned}\mathfrak{N}(xy\lambda) &= N(xy) - \lambda\int N(xs)[N(sy) - \lambda N_1(sy) + \dots \\ &\quad + (-1)^{p-1}\lambda^{p-1}N_{p-1}(sy) + \dots]ds \\ &= N(xy) - \lambda\int N(xs)\,\mathfrak{N}(sy\lambda)\,ds.\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\mathfrak{N}(xy\lambda) &= N(xy) - \lambda\int [N(xs) - \dots + (-1)^{p-1}\lambda^{p-1}N_{p-1}(xs) \\ &\quad + \dots]N(sy)\,ds = N(xy) - \lambda\int \mathfrak{N}(xs\lambda)N(sy)\,ds.\end{aligned}$$

On peut donc dire que le noyau résolvant $\mathfrak{N}(xy\lambda)$ vérifie les deux équations intégrales

$$(12)\quad N(xy) - \mathfrak{N}(xy\lambda) = \lambda\int N(xs)\mathfrak{N}(sy\lambda)\,ds = \lambda\int \mathfrak{N}(xs\lambda)N(sy)\,ds.$$

Nous étudierons le noyau résolvant à l'aide d'une de ces équation intégrales et il est évident que la solution ainsi obtenue vérifiera aussi l'autre, par suite de l'origine commune (11) des deux équations (12).

5. L'équation associée. — A l'étude de l'équation intégrale (7), il convient d'adjoindre celle de l'équation

$$(7\,a)\qquad \psi(x) + \lambda \int N(sx)\,\psi(s)\,ds = f(x)$$

qui s'obtient de la première en permutant les variables du noyau ; on l'appelle *l'équation associée.*

L'équation associée a le même noyau résolvant que l'équation primitive. En effet le même calcul montre que l'élément analytique pour la solution de l'équation (7 a) est

$$\psi(x) = f(x) - \lambda \int \mathfrak{N}(sx\lambda)\,f(s)\,ds.$$

L'étude de ces deux équations (7) et (7 a) peut être faite en même temps ; elle est réduite à celle du noyau résolvant :

6. Les fonctions entières de Fredholm. — Les préliminaires du § 1 nous suggèrent d'essayer de résoudre l'équation intégrale

$$(13)\qquad \mathfrak{N}(xy\lambda) = N(xy) - \lambda \int N(xs)\,\mathfrak{N}(sy\lambda)\,ds$$

par une fonction méromorphe de λ :

$$(14)\quad \mathfrak{N}(xy\lambda) = \frac{A_0(xy) + \lambda A_1(xy) + \ldots + \lambda^p A_p(xy) + \ldots\ldots}{1 + a_1\lambda + \ldots + a_p\lambda^p + \ldots\ldots} = \frac{D(xy\lambda)}{D(\lambda)}$$

En procédant par identification, nous obtenons la relation

$$D(xy\lambda) = N(xy)\,D(\lambda) - \lambda \int N(xs)\,D(sy\lambda)\,ds$$

d'où :

$$(15)\quad \begin{cases} A_0(xy) = N(xy) \\ A_1(xy) = a_1 N(xy) - \int N(xs)\,A_0(sy)\,ds \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_p(xy) = a_p N(xy) - \int N(xs)\,A_{p-1}(sy)\,ds. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Pour parvenir maintenant à la formule de M. I. Fredholm, il suffit de nous imposer la condition

(16) $$pa_p = \int A_{p-1}(ss)\,ds$$

On aura en effet :

$$a_1 = \int N(ss)\,ds$$

$$A_1(xy) = N(xy)\int N(ss)\,ds - \int N(xs)N(sy)\,ds = \int \begin{vmatrix} N(xy) & N(xs) \\ N(sy) & N(ss) \end{vmatrix} ds$$

ou utilisant la notation commode, due à Fredholm

$$\begin{vmatrix} N(x_1y_1) & N(x_1y_2) & \dots & N(x_1y_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ N(x_ny_1) & N(x_ny_2) & \dots & N(x_ny_n) \end{vmatrix} = N\begin{pmatrix} x_1x_2 \dots x_n \\ y_1y_2 \dots y_n \end{pmatrix}$$

nous pourrons écrire :

$$A_1(xy) = \int N\begin{pmatrix} x\ s \\ y\ s \end{pmatrix} ds.$$

On a ensuite :

$$2A_2(xy) = N(xy)\int A_1(ss)\,ds - 2\int N(xs)A_1(sy)\,ds$$

ou écrivant s_1 et s_2 comme variables d'intégration à la place de s dans la dernière intégrale, écrite deux fois de suite :

$$2A_2(xy) = \int [N(xy)A_1(ss)\,ds - N(xs_1)A_1(s_1y)\,ds_1 - N(xs_2)A_1(s_2y)\,ds_2]$$

ou encore

$$2A_2(xy) = \int\Big[N(xy)\,N\begin{pmatrix} s_1\ s_2 \\ s_1\ s_2 \end{pmatrix} - N(xs_1)\,N\begin{pmatrix} s_1\ s_2 \\ y\ s_2 \end{pmatrix}$$
$$- N(xs_2)\,N\begin{pmatrix} s_2\ s_1 \\ y\ s_1 \end{pmatrix}\Big]\,ds_1 ds_2.$$

On reconnaît sous le signe $\int$ le développement du déterminant

$$\begin{vmatrix} N(xy) & N(xs_1) & N(xs_2) \\ N(s_1y) & N(s_1s_1) & N(s_1s_2) \\ N(s_2y) & N(s_2s_1) & N(s_2s_2) \end{vmatrix} = N\begin{pmatrix} x\ s_1\ s_2 \\ y\ s_1\ s_2 \end{pmatrix}$$

car on a évidemment

$$N\begin{pmatrix} s_2 & s_1 \\ y & s_1 \end{pmatrix} = - N\begin{pmatrix} s_1 & s_2 \\ y & s_1 \end{pmatrix}.$$

On a donc :

$$A_2(xy) = \frac{1}{2!}\int N\begin{pmatrix} x & s_1 & s_2 \\ y & s_1 & s_2 \end{pmatrix} ds_1\, ds_2$$

et par conséquent

$$a_3 = \frac{1}{3!}\int N\begin{pmatrix} s_1 & s_2 & s_3 \\ s_1 & s_2 & s_3 \end{pmatrix} ds_1\, ds_2\, ds_3.$$

La loi est générale ; en effet on a :

$$pA_p(xy) = \int N(xy)A_{p-1}(ss)ds - p\int N(xs)A_{p-1}(sy)ds$$

$$= \int [N(xy)A_{p-1}(ss) - N(xs_1)A_{p-1}(s_1y)ds_1$$

$$- N(xs_2)A_{p-1}(s_2y) - \dots - N(xs_p)A_{p-1}(s_py)]ds_p.$$

Remplaçant A_{p-1} par sa valeur, on obtient sous le signe $\int$ le développement du déterminant :

$$\frac{1}{(p-1)!} N\begin{pmatrix} x & s_1 & s_2 & \dots & s_p \\ y & s_1 & s_2 & \dots & s_p \end{pmatrix}.$$

Par conséquent on a dans le cas général

$$A_p(xy) = \frac{1}{p!}\int N\begin{pmatrix} x & s_1 & s_2 & \dots & s_p \\ y & s_1 & s_2 & \dots & s_p \end{pmatrix} ds_1 ds_2 \dots ds_p$$

et

$$a_p = \frac{1}{p!}\int N\begin{pmatrix} s_1 & s_2 & \dots & s_p \\ s_1 & s_2 & \dots & s_p \end{pmatrix} ds_1 ds_2 \dots ds_p.$$

Nous avons ainsi obtenu une solution de la forme :

$$\Pi(xy\lambda) = \frac{D(xy\lambda)}{D(\lambda)}$$

où l'on a :

$$(17)\quad \begin{cases} D(xy\lambda) = N(xy) + \dfrac{\lambda}{1}\displaystyle\int N\begin{pmatrix} xs_1 \\ ys_1 \end{pmatrix} ds_1 + \dfrac{\lambda^2}{2!}\int N\begin{pmatrix} xs_1s_2 \\ ys_1s_2 \end{pmatrix} ds_1 ds_2 + \dots \\ \qquad + \dfrac{\lambda^p}{p!}\displaystyle\int N\begin{pmatrix} xs_1s_2\dots s_p \\ ys_1s_2\dots s_p \end{pmatrix} ds_1 ds_2 \dots ds_p + \dots \\ D(\lambda) = 1 + \lambda \displaystyle\int N(s_1s_1) ds_1 + \dots\dots \\ \qquad + \dfrac{\lambda^p}{p!}\displaystyle\int N\begin{pmatrix} s_1s_2\dots s_p \\ s_1s_2\dots s_p \end{pmatrix} ds_1 ds_1 \dots ds_p + \dots \end{cases}$$

Ces deux fonctions (17) sont des *fonctions entières de λ d'ordre au plus égal à deux*. En effet, d'après un théorème de M. J. Hadamard ([1]), le module d'un déterminant d'ordre p dont tous les éléments sont plus petits que N, est plus petit que

$$N^p p^{\frac{p}{2}}.$$

On aura donc :

$$|a_p| < \frac{N^p p^{\frac{p}{2}}}{p!}(b-a)^p$$

ou utilisant la formule de Stirling approchée

$$p! \sim \left(\frac{p}{e}\right)^p$$

on aura

$$|a_p| \sim \frac{N^p e^p}{p^{\frac{p}{2}}}(b-a)^p$$

d'où

$$(18)\qquad p^{\frac{1}{2}} \sqrt[p]{|a_p|} \sim eN(b-a) < A.$$

L'inégalité (18) nous montre que D (λ) *est une fonction entière en* (λ) *d'ordre au plus égal à deux*. Le même calcul nous démontre le même résultat pour D $(xy\lambda)$ et pour toutes les valeurs de x et y comprises dans l'intervalle d'intégration ab.

---

(1) J. Hadamard, *Bull. des Sc. Math.*, 1893, p. 240 et Wirtinger (*ibid.* 1907, page 175).

7. L'unicité de la solution. — La solution ainsi obtenue :

$$(19) \qquad \varphi(x) = f(x) - \lambda \int \mathfrak{N}(xs\lambda) f(s) ds$$

est *unique* ; c'est ce qui résulte immédiatement du fait que les relations (7) et (19) sont *réciproques*. En effet, faisons l'hypothèse d'une autre solution $\varphi_1(x)$ telle que

$$(20) \qquad \varphi_1(x) + \lambda \int N(xs) \varphi_1(s) ds = f(x).$$

Remplaçant en (19) la valeur de $f(x)$ tirée de (20), on a, en mettant aussi en évidence sous le signe $\int$ la fonction $\varphi_1(x)$:

$$\varphi(x) = \varphi_1(x) + \lambda \int [N(xs) - \mathfrak{N}(xs\lambda) + \lambda \int \mathfrak{N}(xt\lambda) N(ts) dt] \varphi_1(s) ds$$

Mais en vertu des équations intégrales du noyau résolvant, l'expression sous le $\int$ est nulle ; on aura donc :

$$\varphi(x) \equiv \varphi_1(x)$$

La solution $\varphi_1(x)$ coïncide donc nécessairement avec $\varphi(x)$.

8. Le premier théorème de M. I. Fredholm. — On peut résumer tous les résultats obtenus dans ce chapitre dans l'énoncé suivant :

L'équation

$$\varphi(x) + \lambda \int N(xs) \varphi(s) ds = f(x)$$

où les fonctions $N(xy)$ *et* $f(x)$ *sont des fonctions finies et intégrables dans le domaine ab, admet une solution et une seule donnée par la formule*

$$\varphi(x) = f(x) - \lambda \int \mathfrak{N}(xs\lambda) f(s) ds$$

où $\mathfrak{N}(xy\lambda)$ *désigne le quotient de deux fonctions entières en* λ, $D(xy\lambda)$ *et* $D(\lambda)$, *d'ordre au plus égal à deux.*

C'est en cela que consiste le premier théorème de M. J. Fredholm.

III. — LES ZÉROS DE D(λ)

9. Le développement de log D(λ); traces du noyau. — Une formule importante, due aussi à M. I. Fredholm, nous sera très utile dans la suite. Remarquons pour l'établir que la loi de dépendance (16) entre les coefficients a_p et $N_p(xy)$ nous permet d'écrire :

$$(21)\qquad \frac{dD(\lambda)}{d\lambda} = \int D(ss\lambda)\,ds$$

ou divisant par D(λ), pour mettre en évidence au second membre le noyau résolvant :

$$(22)\qquad \frac{D'(\lambda)}{D(\lambda)} = \int \mathfrak{N}(ss\lambda)\,ds.$$

Pour évaluer le second membre, nous allons nous servir du développement Taylorien (11) du noyau résolvant ; nous obtenons ainsi :

$$\int \mathfrak{N}(ss\lambda)\,ds = n_1 - \lambda n_2 + \ldots + (-1)^{p-1}\lambda^{p-1}n_p + \ldots$$

en désignant d'une manière générale :

$$n_p = \int N_{p-1}(ss)\,ds.$$

Ces constantes interviennent souvent dans la suite ; nous les appellerons pour cela, les *traces* du noyau $N(xy)$ [1].

Remplaçant en (22) et intégrant par rapport à λ, on obtient la formule cherchée :

$$(23)\qquad \log D(\lambda) = n_1\lambda - n_2\frac{\lambda^2}{2} + \ldots + (-1)^{p-1}\frac{n_p}{p}\lambda^p + \ldots$$

la constante d'intégration étant nulle puisque D(0) = 1.

---

[1] Spur (allemand).

10. Valeurs caractéristiques du noyau. — L'importance des zéros de $D(\lambda)$ résulte du théorème suivant :

Tout zéro λ_p de $D(\lambda)$ est un pôle du noyau résolvant. En effet l'égalité :

$$D'(\lambda) = \int D(ss\lambda)\, ds$$

démontrée au numéro précédent, nous montre que, si λ_p est aussi un zéro de la fonction $D(xy\lambda)$, l'ordre de multiplicité dans cette fonction est au moins d'une unité plus petit que dans $D(\lambda)$; λ_p reste par conséquent pôle du noyau résolvant.

Ces zéros forment un ensemble dénombrable. Soient $\lambda_1\ \lambda_2 \ldots \lambda_p$ ces zéros rangés dans l'ordre de leurs modules croissants. Puisque *l'ordre* de la fonction $D(\lambda)$ est au plus égal à deux, la série :

$$\frac{1}{\lambda_1^{2+\varepsilon}} + \frac{1}{\lambda_2^{2+\varepsilon}} + \ldots + \frac{1}{\lambda_p^{2+\varepsilon}} + \ldots$$

(ε arbitrairement petit) converge sûrement, ce qui nous donne une indication sur leur densité. Ces zéros jouent un rôle fondamental dans la théorie de l'équation de Fredholm ; nous dirons qu'ils sont *les valeurs caractéristiques du noyau* (1) ; nous appellerons aussi $D(\lambda)$, *fonction caractéristique (ou déterminante)* du noyau.

11. Condition de non-existence des valeurs caractéristiques. — Le développement de $D(\lambda)$ en produit infini est de la forme :

$$D(\lambda) = e^{\alpha\lambda+\beta\lambda^2} \prod_{p=1}^{\infty} E\left(\frac{\lambda}{\lambda_p}\right)$$

en désignant par $E\left(\frac{\lambda}{\lambda_p}\right)$ le facteur primaire correspondant à λ_p.

Si $D(\lambda)$ n'a aucun zéro, elle se réduira à :

$$D(\lambda) = e^{\alpha\lambda+\beta\lambda^2} \qquad (24)$$

---

(1) Eigenwerte (Hilbert).

d'où l'on déduit :

$$\log D(\lambda) = \alpha\lambda + \beta\lambda^2.$$

En comparant avec le développement connu (23) de $\log D(\lambda)$, on voit que :

$$n_3 = n_4 = \dots n_p \dots = 0.$$

Réciproquement, si $n_p = 0$ ($p > 3$), $D(\lambda)$ sera nécessairement de la forme (24) et par conséquent il n'y aura aucune valeur caractéristique.

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un noyau n'ait aucune valeur caractéristique est que ses traces, à partir de la troisième, soient toutes nulles (¹).

12. Le cas d'un nombre fini de valeurs caractéristiques. — Lorsque les valeurs caractéristiques sont en nombre fini, la fonction $D(\lambda)$ aura la forme :

$$(25) \qquad D(\lambda) = e^{\alpha\lambda+\beta\lambda^2}\left(1 + \frac{\lambda}{\lambda_1}\right)\left(1 + \frac{\lambda}{\lambda_2}\right)\cdots\left(1 + \frac{\lambda}{\lambda_k}\right)$$

d'où il résulte :

$$\log D(\lambda) = \alpha\lambda + \beta\lambda^2 + \sum_1^k \log\left(1 + \frac{\lambda}{\lambda_p}\right)$$

et en identifiant avec (23) :

$$n_p = \frac{1}{\lambda_1^p} + \frac{1}{\lambda_2^p} + \dots + \frac{1}{\lambda_k^p} \qquad (p > 2).$$

Réciproquement, dans ce cas on peut immédiatement mettre $D(\lambda)$ sous la forme (25). Nous voyons donc que les traces du noyau doivent être, à partir de la troisième, égales aux sommes des puissances semblables des k quantités $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_k$; mais on sait que, entre les sommes des puissances semblables de k nombres, il existe une même relation de récurrence de la forme :

$$a_0 n_p + a_1 n_{p+1} + \dots + a_k n_{p+k} = 0$$

et vice versa (²).

(¹) T. Lalesco. — *Sur l'ordre de la fonction* $D(\lambda)$ *de Fredholm*. C. R., t. 145, 1907, p. 906.

(²) E. Goursat, *Mém. cité*, p. 98, et T. Lalesco, *Sur la fonction* $D(\lambda)$ *de Fredholm*. C. R., t. 145, 1907, p. 1136.

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un noyau n'ait qu'un nombre fini de valeurs caractéristiques est qu'il existe entre ses traces, à partir de la troisième, une même relation de récurrence linéaire et homogène :

$$a_0 n_p + a_1 n_{p+1} + \dots + a_k n_{p+k} = 0.$$

CHAPITRE II

L'ÉTUDE APPROFONDIE DU NOYAU RÉSOLVANT [1]

I. — FONCTIONS ORTHOGONALES ET BIORTHOGONALES

1. Définitions. — Les fonctions, en nombre fini ou infini :

$$\varphi_1(x)\ \varphi_2(x)\ \ldots\ \varphi_n(x)\ \ldots$$

forment un *système orthogonal* si elles remplissent les conditions :

$$\int \varphi_i(s)\, \varphi_k(s)\, ds = \delta_{ik}$$

δ_{ik} désignant un symbole égal à zéro si $i \neq k$ et à 1 si $i = k$.

Une suite de fonctions forme un *système biorthogonal* si on peut les séparer en deux groupes de fonctions :

$$\varphi_1(x)\ \varphi_2(x)\ \ldots\ \varphi_n(x)\ \ldots$$
$$\psi_1(x)\ \psi_2(x)\ \ldots\ \psi_n(x)\ \ldots$$

qui remplissent les conditions :

$$\int \varphi_i(s)\, \psi_k(s)\, ds = \delta_{ik}.$$

---

(1) Voir à ce sujet :

J. Plemelj, *Zur Theorie der Fredholmschen Gleichung* (Monatshefte für Math. und Physik XV, p. 93-128; B. Heywood, *Mém. cité*; E. Goursat, *Mém. cité* Annales de la Fac. de Toulouse); H. Mercer (*Mém. cité*).

Et tout récemment :

A. Landsberg, *Theorie der Elementarteiler linearer Integralgleichungen* (Math. Annalen., Bd 69, p. 227-266) 1910.

Un système orthogonal ou biorthogonal est *complet* (fermé, abgeschlossen) si on ne peut lui adjoindre aucune autre fonction ou paire de fonctions.

Les fonctions $\varphi_p(x)$ et $\psi_p(x)$, au même indice, sont appelées fonctions *associées*.

Les fonctions d'un système orthogonal sont linéairement indépendantes, car une relation de la forme :

$$\sum_1^p c_k \varphi_k(x) = 0$$

conduirait en multipliant par $\varphi_k(x)\,dx$ et intégrant de a à b, à $c_k = 0$. De même, *les fonctions d'un système biorthogonal appartenant à un même groupe sont aussi linéairement indépendantes* : la même démonstration, en multipliant par $\psi_k(x)\,dx$.

2. Orthogonalisation et biorthogonalisation d'une suite de fonctions. — Réciproquement, étant donnée une suite de n fonctions linéairement indépendantes, on peut en déduire par des combinaisons linéaires, un système orthogonal de n fonctions. Voici comment procède M. E. Goursat [1] :

Soient données les fonctions : (1) $\varphi_1(x)\ \varphi_2(x) \dots \varphi_n(x)$. Prenons $\Phi_1(x) = \varphi_1(x)$ et choisissons les coefficients $c_2\ c_3 \dots c_n$ de façon qu'on ait :

$$\int [\varphi_p(s) - c_p \varphi_1(s)]\, \varphi_1(s)\, ds = 0 \qquad (p = 2, \dots n).$$

En posant :

$$\varphi_p(x) - c_p \varphi_1(x) = \overline{\varphi}_p(x) \qquad (p = 2, \dots n)$$

nous obtenons la suite de fonctions :

$$\Phi_1(x)\ \overline{\varphi_2}(x) \dots \overline{\varphi_n}(x)$$

pour lesquelles on a :

$$\int \overline{\varphi}_p(x)\ \Phi_1(x)\, dx = 0 \qquad (p = 2, \dots n).$$

---

[1] E. Goursat, l. c. (Toulouse, p. 66).

Les fonctions $\overline{\varphi_2}(x) \dots \overline{\varphi_n}(x)$ sont à leur tour, aussi linéairement indépendantes ; on peut donc leur appliquer le même procédé et l'on parvient ainsi, de proche en proche, à n fonctions

$$(2) \qquad \Phi_1(x)\ \Phi_2(x) \dots \Phi_n(x)$$

qui remplissent les conditions

$$\int \Phi_i(s)\ \Phi_k(s)\,ds = 0 \qquad (i \neq k).$$

Pour que l'on ait maintenant aussi

$$\int \Phi_p^2(s)\,ds = 1,$$

il suffit de multiplier $\Phi_p(x)$ par la constante

$$\frac{1}{\sqrt{\int \Phi_p^2(s)\,ds}}.$$

Le système orthogonal (2) ainsi obtenu n'est pas unique ; en effet les fonctions

$$\overline{\Phi_p}(x) = \sum_{k=1}^{n} a_{pk}\ \Phi_k(x) \quad (p = 1, \dots n)$$

où le déterminant $| a_{ik} |$ est orthogonal, forment aussi un pareil système ; réciproquement, il est évident qu'on épuise ainsi tous les systèmes orthogonaux équivalents à (1).

D'une façon absolument analogue, considérons deux suites de n fonctions linéairement indépendantes

$$(3) \qquad \begin{cases} \varphi_1(x)\ \varphi_2(x) \dots \varphi_n(x) \\ \psi_1(x)\ \psi_2(x) \dots \psi_n(x) \end{cases}$$

telles qu'aucune combinaison linéaire des fonctions $\varphi_p(x)$ ne soit pas orthogonale à la fois à toutes les fonctions $\psi_p(x)$ de la seconde ligne. Je dis qu'on peut en déduire un système biorthogonal. En effet, posons $\varphi_1(x) = \Phi_1(x)$ et désignons par $\Psi_1(x)$ une combinaison linéaire toujours existante des $\psi_p(x)$ telle que

$$\int \Phi_1(s)\ \Psi_1(s)\,ds \neq 0.$$

Déterminons maintenant les coefficients $a_2\ a_3\ \ldots\ a_n$ et b_2 $b_3\ \ldots\ b_n$ de façon qu'on ait

$$\left.\begin{aligned}\int \Psi_1(s)\,[\varphi_p(s) - a_p\Phi_1(s)]\,ds = 0\\ \int \Phi_1(s)\,[\psi_p(s) - b_p\Psi_1(s)]\,ds = 0\end{aligned}\right\}\ (p = 2, \ldots n)$$

et posons :

$$\left.\begin{aligned}\varphi_p(x) - a_p\Phi_1(x) = \overline{\varphi}_p(x)\\ \psi_p(x) - b_p\Psi_1(x) = \overline{\psi}_p(x)\end{aligned}\right\}\ (p = 2, \ldots n).$$

Nous obtenons les fonctions

$$\begin{gathered}\Phi_1(x)\ \overline{\varphi}_2(x)\ \ldots\ \overline{\varphi}_n(x)\\ \Psi_1(x)\ \overline{\psi}_2(x)\ \ldots\ \overline{\psi}_n(x)\end{gathered}$$

et l'on a les relations

$$\left.\begin{aligned}\int \Phi_1(s)\,\overline{\psi}_p(s)\,ds = 0\\ \int \Psi_1(s)\,\overline{\varphi}_p(s)\,ds = 0\end{aligned}\right\}\ (p = 2, \ldots n).$$

Les fonctions

$$(4)\qquad \left\{\begin{gathered}\overline{\varphi}_2(x)\ \overline{\varphi}_3(x)\ \ldots\ \overline{\varphi}_n(x)\\ \overline{\psi}_2(x)\ \overline{\psi}_3(x)\ \ldots\ \overline{\psi}_n(x)\end{gathered}\right.$$

sont, dans chaque groupe, aussi linéairement indépendantes et aucune combinaison linéaire des $\overline{\varphi}$ ne peut pas être orthogonale à la fois à tous les $\overline{\psi}$, car comme elle est déjà orthogonale à $\Psi_1(x)$ elle serait alors orthogonale à toutes les fonctions $\psi_p(x)$ ce qui est contraire à l'hypothèse.

Le système (4) jouit donc des mêmes propriétés que le système primitif (3) ; on peut donc lui répéter la même opération et l'on arrive ainsi de proche en proche à n paires de fonctions $\Phi_p(x)$ et $\Psi_p(x)$ qui satisfont aux conditions

$$\int \Phi_i(s)\,\Psi_k(s)\,ds = 0 \quad \text{si} \quad i \neq k$$

et

$$\int \Phi_p(s)\Psi_p(s)ds \neq 0\,;$$

si l'on multiplie enfin la paire $\Phi_p(x)$ et $\Psi_p(x)$ par la constante $\dfrac{1}{\sqrt{\int \Phi_p(s)\Psi_p(s)ds}}$ on obtient le système biorthogonal cherché.

Ce système n'est pas unique ; en effet si nous posons

$$(5)\qquad \begin{cases} \overline{\Phi}_p(x) = \sum_{r=1}^{n} a_{pr}\Phi_r(x) \\ \overline{\Psi}_p(x) = \sum_{r=1}^{n} b_{pr}\Psi_r(x) \end{cases} \qquad (p = 1, \ldots n)$$

les fonctions $\overline{\Phi}_p(x)$ et $\overline{\Psi}_p(x)$ formeront aussi un système biorthogonal, à condition qu'on ait :

$$(5')\qquad \sum_{r=1}^{n} a_{ir}\, b_{kr} = \delta_{ik} \qquad (i, k = 1 \ldots n).$$

Le déterminant $|\, a_{ik}\, | \neq 0$ est arbitraire ; les relations (5') déterminent alors d'une façon unique le déterminant $|\, b_{ik}\, |$.

Réciproquement, la double substitution (5), que nous appellerons *substitution biorthogonale*, fournit le système biorthogonal le plus général équivalent à (3).

Les procédés réguliers de réduction précédents sont évidemment applicables aussi au cas où les suites (1) et (3) sont infinies [1].

3. Les fonctions de la forme $\varphi(xy) = \sum_{p=1}^{n} \varphi_p(x)\,\psi_p(y)$. — Nous aurons besoin dans la suite du théorème suivant :

Si une fonction $\varphi(xy)$ *à trace finie vérifie la relation*

$$(6)\qquad \varphi(xy) = \int \varphi(xs)\,\varphi(sy)\,ds$$

[1] On peut consulter sur la théorie générale des systèmes biorthogonaux, un mémoire tout récemment paru ; A. J. Bell, *Biorthogonal systems of fonctions*. (Trans. Am. Mat. Society, 1911).

elle est nécessairement de la forme

$$(7)\qquad \varphi_1(x)\,\psi_1(y) + \varphi_2(x)\,\psi_2(y) + \ldots + \varphi_n(x)\,\psi_n(y)$$

les fonctions φ *et* ψ *formant les deux groupes d'un système biorthogonal.*

Remarquons d'abord que la trace est nécessairement un nombre entier et positif. En effet, considérons $\varphi(xy)$ comme noyau d'une équation de Fredholm de seconde espèce ; en vertu de la relation (6) tous les noyaux itérés sont identiques et par conséquent toutes les *traces* du noyau sont égales à

$$\varphi_1 = \int \varphi(ss)\,ds.$$

On aura donc :

$$\log D(\lambda) = \varphi_1\left[\frac{\lambda}{1} - \frac{\lambda^2}{2} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{\lambda^n}{n} + \ldots\right] = \varphi_1 \log(1+\lambda)$$

d'où

$$(8)\qquad D(\lambda) = (1+\lambda)^{\varphi_1}$$

ce qui montre bien que φ_1 est un nombre entier et positif n.

Cela posé, formons la fonction

$$\varphi(xy) - \frac{\varphi(x_1y)\,\varphi(xy_1)}{\varphi(x_1y_1)} = \varphi_1(xy).$$

Cette fonction vérifie aussi (6) *mais sa trace est* $n - 1$.

En effet, on a :

$$\int \varphi_1(xs)\varphi_1(sy)ds = \int\left[\varphi(xs) - \frac{\varphi(xy_1)\varphi(x_1s)}{\varphi(x_1y_1)}\right]\left[\varphi(sy) - \frac{\varphi(sy_1)\varphi(x_1y)}{\varphi(x_1y_1)}\right]ds$$

$$= \varphi(xy) - \frac{\varphi(xy_1)\,\varphi(x_1y)}{\varphi(x_1y_1)} - \frac{\varphi(xy_1)\,\varphi(x_1y)}{\varphi(x_1y_1)} + \frac{\varphi(xy_1)\varphi(x_1y)}{\varphi(x_1y_1)}$$

$$= \varphi(xy) - \frac{\varphi(xy_1)\,\varphi(x_1y)}{\varphi(x_1y_1)} = \varphi_1(xy).$$

La trace est :

$$\int \varphi_1(ss)ds = \int \varphi(ss)ds - \frac{\int \varphi(x_1s)\,\varphi(sy_1)\,ds}{\varphi(x_1y_1)} = n - 1.$$

On peut alors appliquer à la fonction $\varphi_1(xy)$ le même procédé qu'à $\varphi(xy)$ de sorte qu'on pourra écrire $\varphi(xy)$ sous la forme

$$\varphi(xy) = \varphi_1(x)\psi_1(y) + \varphi_2(x)\psi_2(y) + \ldots + \varphi_n(x)\psi_n(y) + \chi(xy)$$

$\chi(xy)$ étant une fonction vérifiant la relation (6) mais ayant une trace nulle ; je dis maintenant que $\chi(xy)$ est identiquement nulle. En effet son noyau résolvant serait : $\frac{\chi(xy)}{1+\lambda}$, ce qui est impossible car $D(\lambda) \equiv 1$, comme cela résulte de (8) en y faisant $\varphi_1 = 0$; on a donc $\chi(xy) \equiv 0$.

Les conditions de biorthogonalité résultent dès lors en écrivant que l'expression (7) vérifie la relation (6). On doit avoir

$$\sum_{p=1}^{n} \varphi_p(x)\psi_p(y) = \sum \varphi_i(x)\psi_k(y) \int \varphi_i(s)\psi_k(s)\,ds$$

ce qui met bien en évidence les relations de biorthogonalité demandées.

Réciproquement, il est évident que toute fonction $\varphi(xy)$ du type (7) a sa trace entière et vérifie la relation (6). On peut donc dire en résumant :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction $\varphi(xy)$ à trace finie, soit de la forme (7), est qu'elle vérifie l'équation (6).

II. — FONCTIONS PRINCIPALES

4. Noyaux orthogonaux. — Cette notion fondamentale est due à MM. E. Goursat [1] et B. Heywood [2] ; elle est indispensable pour éviter les passages à la limite algébriques et se dégage d'ailleurs tout naturellement de l'étude approfondie du noyau résolvant. Il est utile, pour d'autres recherches aussi, de la présenter directement.

---

(1) E. GOURSAT, *Sur les éq. intégrales* (C. R. 145, p. 667, 1907) et *Sur quelques propr. des éq. intégrales* (même tome, p. 752).

(2) B. HEYWOOD, *Sur quelques points de la théorie des fns fond.* etc. (C. R. 145, p. 908). Voir aussi la note de M. PICARD (p. 909).

Deux noyaux $P(xy)$ et $R(xy)$ sont *orthogonaux*, quand on a identiquement

$$(9) \qquad \begin{cases} \int P(xs)R(sy)\,ds = 0 \\ \int R(xs)P(sy)\,ds = 0 \end{cases}$$

Lorsque l'une seulement de ces relations est vérifiée, nous dirons avec M. Goursat que les noyaux sont *semi orthogonaux*.

Lorsque deux noyaux $P(xy)$ et $R(xy)$ sont orthogonaux, remarquons en outre que l'on a aussi

$$\int P(xs)\mathcal{R}(sy\lambda)\,ds = \int R(xs)\mathfrak{P}(sy\lambda)\,ds = 0.$$

Il suffit de se rappeler la formule

$$\mathcal{R}(xy\lambda) = R(xy) - \lambda R_1(xy) + \dots (-1)^p\lambda^p R_p(xy) + \dots$$

Les noyaux orthogonaux jouissent des deux propriétés suivantes :

I. *Si les noyaux* $P(xy)$ *et* $R(xy)$ *sont orthogonaux ou même semi orthogonaux* (*Goursat*) *et si l'on pose*

$$N(xy) = P(xy) + R(xy)$$

on a

$$D_N(\lambda) = D_P(\lambda) \,.\, D_R(\lambda).$$

II. *Si les noyaux* $P(xy)$ et $R(xy)$ *sont orthogonaux, on a, avec les mêmes notations*

$$\mathfrak{N}(xy) = \mathfrak{P}(xy) + \mathcal{R}(xy).$$

Le premier théorème résulte immédiatement en ajoutant membre à membre les deux relations :

$$\log D_P(\lambda) = p_1\lambda - p_2\frac{\lambda^2}{2} + \dots + (-1)^{n-1}p_n\frac{\lambda^n}{n} + \dots$$

$$\log D_R(\lambda) = r_1\lambda - r_2\frac{\lambda^2}{2} + \dots + (-1)^{n-1}r_n\frac{\lambda^n}{n} + \dots$$

ce qui donne

$$\log D_P(\lambda) D_R(\lambda) = (p_1 + r_1)\lambda - (p_2 + r_2)\frac{\lambda^2}{2} + \dots$$
$$+ (-1)^{n-1}(p_n + r_n)\frac{\lambda^n}{n} + \dots$$

Il suffit maintenant de remarquer que l'on a

$$n_1 = p_1 + r_1$$

$$n_2 = \int_2 [P(s_1s_2) + R(s_1s_2)][P(s_2s_1) + R(s_2s_1)]ds_1ds_2$$

$$= p_2 + r_2 + 2\int P(s_1s_2)R(s_2s_1)ds_1ds_2$$

or en vertu de *l'une* seulement des relations (9) on a :

$$\int_a^b P(s_1s_2)R(s_2s_1)ds_1ds_2 = 0$$

d'où il résulte

$$n_2 = p_2 + r_2.$$

La loi est maintenant générale ; en effet

$$n_q = \int [P(s_1s_2) + R(s_1s_2)][P(s_2s_3) + R(s_2s_3)] + \dots$$
$$+ [P(s_qs_1) + R(s_qs_1)]ds_1ds_2 \dots ds_q = p_q + r_q + \alpha_r$$

α_r étant une somme d'intégrales qui sont toutes nulles en vertu de l'une quelconque seulement des relations (9). On a donc

$$\log D_N(\lambda) = \log D_P(\lambda) \,.\, D_R(\lambda)$$

d'où

$$D_N(\lambda) = D_P(\lambda) \,.\, D_R(\lambda).$$

Pour démontrer le second théorème, partons des équations de définition des noyaux résolvants ; ce sont

$$(10)\quad \begin{cases} \mathfrak{P}(xy\lambda) = P(xy) - \lambda\int P(xs)\mathfrak{P}(sy\lambda)ds \\ \mathfrak{R}(xy\lambda) = R(xy) - \lambda\int R(xs)\mathfrak{R}(sy\lambda)ds \end{cases}$$

d'où par addition

$$\mathfrak{L}(xy) + \mathfrak{R}(xy) = \mathrm{P}(xy) + \mathrm{R}(xy) - \lambda \int [\mathrm{P}(xs)\mathfrak{L}(sy\lambda) + \mathrm{R}(xs)\mathfrak{R}(sy\lambda)]\, ds$$

ou encore

$$(11) \qquad = \mathrm{P}(xy) + \mathrm{R}(xy) - \lambda \int [\mathrm{P}(xs) + \mathrm{R}(xs)]\,[\mathfrak{L}(sy\lambda) + \mathfrak{R}(sy\lambda)]\, ds$$

car les intégrales introduites

$$\int \mathrm{P}(xs)\mathfrak{R}(sy\lambda)\, ds \qquad \text{et} \qquad \int \mathrm{R}(xs)\mathfrak{L}(sy\lambda)\, ds$$

sont nulles.

L'équation (11) montre précisément que le noyau résolvant de

$$\mathrm{P}(xy) + \mathrm{R}(xy) \qquad \text{est} \qquad \mathfrak{L}(xy\lambda) + \mathfrak{R}(xy\lambda).$$

5. L'équation intégrale générale des noyaux résolvants. — Nous avons vu (*p.* 24) que le noyau résolvant vérifie les deux équations intégrales

$$(12) \quad \mathrm{N}(xy) - \mathfrak{N}(xy\lambda) = \lambda \int \mathrm{N}(xs)\mathfrak{N}(sy\lambda)\, ds = \lambda \int \mathfrak{N}(xs\lambda)\mathrm{N}(sy)\, ds.$$

Ces équations sont des cas particuliers de l'équation intégrale plus générale (1) suivante :

$$(13) \quad \mathfrak{N}(xy\lambda) - \mathfrak{N}(xy\mu) = (\mu - \lambda) \int \mathfrak{N}(xs\lambda)\mathfrak{N}(sy\mu)\, ds.$$

Pour l'établir, retranchons membre à membre les équations

$$(14) \quad \begin{cases} \mathrm{N}(xy) - \mathfrak{N}(xy\lambda) = \lambda \displaystyle\int \mathrm{N}(xs)\mathfrak{N}(sy\lambda)\, ds \\ \mathrm{N}(xy) - \mathfrak{N}(xy\mu) = \mu \displaystyle\int \mathrm{N}(xs)\mathfrak{N}(sy\mu)\, ds \end{cases}$$

ce qui nous donne :

$$(14') \quad \mathfrak{N}(xy\lambda) - \mathfrak{N}(xy\mu) = \mu \int \mathrm{N}(xs)\mathfrak{N}(sy\mu)\, ds - \lambda \int \mathrm{N}(xs)\mathfrak{N}(sy\lambda)\, ds.$$

---

(1) Elle a été signalée par MM. Hilbert et Plemelj.

Pour obtenir la valeur du second membre autrement, faisons dans la première équation (14) $x = t$, multiplions-la par $\mu\, \mathfrak{N}(xt\mu)\, dt$; de même dans la seconde faisons $y = t$, multiplions par $\lambda\, \mathfrak{N}(ty\lambda)\, dt$; intégrons et faisons la différence. On obtient :

$$(\mu - \lambda) \int \mathfrak{N}(xt\mu)\, \mathfrak{N}(ty\lambda)\, dt = \mu \int \mathrm{N}(xt)\, \mathfrak{N}(ty\mu)\, dt$$
$$- \lambda \int \mathrm{N}(xt)\, \mathfrak{N}(ty\lambda)\, dt.$$

En combinant l'équation (14') avec celle-ci on obtient l'équation intégrale cherchée.

Ce qui rend cette équation intégrale particulièrement intéressante c'est que le noyau générateur $\mathrm{N}(xy)$ *n'y figure plus*. C'est donc une équation que vérifient *tous les noyaux résolvants* et qui acquiert ainsi le caractère d'une opération analytique *in abstracto* dont (13) pourrait servir comme équation de définition.

6. La partie caractéristique d'un noyau résolvant relative à un pôle. — Soit λ_1, une racine de $\mathrm{D}(\lambda)$ de multiplicité n; nous avons vu (p. 31, n° 10) qu'elle sera un pôle pour le noyau résolvant; soit $m \leqq n$ l'ordre de ce pôle. Le noyau résolvant pourra alors s'écrire dans le voisinage λ de λ_1,

$$(15) \qquad \mathfrak{N}(xy\lambda) = \frac{\varphi_m(xy)}{(\lambda - \lambda_1)^m} + \frac{\varphi_{m-1}(xy)}{(\lambda - \lambda_1)^{m-1}} + \dots$$
$$+ \frac{\varphi_1(xy)}{(\lambda - \lambda_1)} + \sum_{p=0}^{\infty} \psi_p(xy)(\lambda - \lambda_1)^p = \mathrm{G}_1(xy\lambda) + \mathfrak{L}(xy\lambda)$$

en désignant pour abréger par $\mathrm{G}_1(xy\lambda)$ la partie principale relative au pôle λ_1.

Nous nous proposons d'étudier de plus près les fonctions $\varphi(xy)$ et $\psi(xy)$. Remplaçons pour cela dans l'équation générale (13) $\mathfrak{N}(xy\lambda)$ par sa valeur (15) et posons pour abréger $\lambda - \lambda_1 = h$

et $\mu - \lambda_1 = k$, on obtient

$$\varphi_m(xy)\left[\frac{1}{h^m} - \frac{1}{k^m}\right] + \dots + \varphi_1(xy)\left[\frac{1}{h} - \frac{1}{k}\right] + \sum_{p=1}^{\infty} \psi_p(xy)(h^p - k^p)$$

$$= (k-h)\int \left[\frac{\varphi_m(xs)}{h^m} + \dots + \frac{\varphi_1(xs)}{h} + \sum_{p=0}^{\infty} \psi_p(xs)h^p\right]\left[\frac{\varphi_m(sy)}{k^m} + \dots \right.$$

$$\left. + \frac{\varphi_1(sy)}{k} + \sum_{p=0}^{\infty} \psi_p(sy)k^p\right] ds$$

ou après simplification par $k - h$:

$$(16)\quad \begin{cases} \dfrac{\varphi_1(xy)}{kh} + \dots + \dfrac{\varphi_m(xy)}{h^m k^m}\left[h^{m-1} + kh^{m-2} + \dots + k^{m-1}\right] \\ \qquad + \displaystyle\sum_{p=1}^{\infty} \psi_p(xy)\left[h^{p-1} + kh^{p-2} + \dots + k^{p-1}\right] \\ = \displaystyle\sum_{p,q=1}^{m} \frac{1}{h^p k^q}\int \varphi_p(xs)\varphi_q(sy)\,ds + \sum_{pq} \frac{h^p}{k^q}\int \psi_p(xs)\varphi_q(sy)\,ds \\ + \displaystyle\sum_{pq} \frac{k^p}{h^q}\int \varphi_q(xs)\psi_p(sy)\,ds + \sum_{pq} h^p k^q \int \psi_p(xs)\psi_q(sy)\,ds. \end{cases}$$

Le second membre de (16) contient quatre sommes de termes. Si nous considérons d'abord la première somme dont les termes contiennent h et k à la fois au dénominateur, elle nous donne par identification avec le premier membre, les relations

$$(17)\qquad \varphi_{p+q-1}(xy) = \int \varphi_p(xs)\varphi_q(sy)\,ds \qquad p + q \leqq m + 1$$

tant que l'indice $p + q - 1$ existe, c'est-à-dire tant que $p + q - 1 \leqq m$ et

$$(18)\qquad \int \varphi_p(xs)\varphi_q(sy)\,ds = 0 \qquad p + q > m + 1$$

pour le reste.

Les termes des secondes et troisièmes sommes du 2[e] membre, n'existant pas dans le premier, on aura pour tous les indices :

$$(19)\qquad \int \varphi_p(xs)\psi_q(sy)\,ds = \int \psi_p(xs)\varphi_q(sy)\,ds = 0$$

ce qui nous montre dès le début que toutes les fonctions $\varphi(xy)$ sont orthogonales aux fonctions $\psi(xy)$ en d'autres mots que *les fonctions* $G_1(xy\lambda)$ *et* $\mathfrak{L}(xy\lambda)$ *sont orthogonales pour toute valeur de* λ. Enfin la quatrième somme nous donne les relations

$$(20) \qquad -\psi_{p+q-1}(xy) = \int \psi_p(xs)\psi_q(sy)\,ds.$$

Inversement, les relations (17) et (18) étant remplies, $G_1(xy\lambda)$ est un noyau résolvant à lui seul, car il vérifie dans ces conditions l'équation générale des noyaux résolvants ; il est par conséquent le noyau résolvant de :

$$G_1(xy\,;\,0) = \frac{\varphi_m(xy)}{(-\lambda_1)^m} + \frac{\varphi_{m-1}(xy)}{(-\lambda_1)^{m-1}} + \dots + \frac{\varphi_1(xy)}{-\lambda_1}$$

qu'on appelle *la partie du noyau relative au pôle* λ_1.

En vertu d'une remarque précédente, *la partie du noyau relative au pôle* λ_1 *est orthogonale au reste*. On peut donc l'étudier séparément. Remarquons enfin que le noyau $\mathfrak{L}(xy)$ n'a plus λ_1 comme valeur caractéristique.

7. Fonctions principales. — Pour trouver l'expression générale des fonctions $\varphi_p(xy)$, il suffira donc de résoudre le système d'équations

$$(21\,a) \qquad \varphi_{p+q-1}(xy) = \int \varphi_p(xs)\varphi_q(sy)\,ds \qquad p+q \leqq m+1$$

$$(21\,b) \qquad 0 = \int \varphi_p(xs)\varphi_q(sy)\,ds \qquad p+q > m+1$$

qui, d'après ce que nous venons de voir, les caractérisent.

Faisons-y d'abord $p = q = 1$; ceci nous donne l'équation :

$$\varphi_1(xy) = \int \varphi_1(xs)\varphi_1(sy)\,ds.$$

Or, puisque la trace de $\varphi_1(xy)$ est finie[1], cette fonction sera

---

[1] Cela résulte du fait que la trace de $G(xy\lambda)$ est finie pour $\lambda \neq \lambda_1$, d'une façon plus précise on a :

$$\int G(ss\lambda)\,ds = \frac{D'_G(\lambda)}{D_G(\lambda)} = \dots + \frac{n}{\lambda - \lambda_1} + \dots$$

donc :

$$\int \varphi_1(ss)\,ds = n.$$

nécessairement de la forme

$$\varphi_1(xy) = \varphi_1(x)\psi_1(y) + \dots + \varphi_n(x)\psi_n(y)$$

les fonctions φ et ψ formant les deux groupes d'un système biorthogonal, (p. 38, n° 3).

Faisons ensuite $q = 2$ et p quelconque et inversement; on obtient les relations

$$(22) \qquad \varphi_{p+1}(xy) = \int \varphi_p(xs)\varphi_2(sy)\,ds = \int \varphi_2(xs)\varphi_p(sy)\,ds$$

dont la première, pour $p = 1$:

$$\varphi_2(xy) = \int \varphi_1(xs)\varphi_2(sy)\,ds = \int \varphi_2(xs)\varphi_1(sy)\,ds.$$

nous montre que $\varphi_1(xy)$ est fonction linéaire des φ et ψ séparément. On aura donc nécessairement

$$(23\,a) \qquad \varphi_2(xy) = \sum_{i,\,k=1}^{p} a_{ik}\varphi_i(x)\psi_k(y),$$

Les relations (22) suivantes nous donnent alors les valeurs des autres fonctions

$$(23\,b) \quad \begin{cases} \varphi_3(xy) = \int \varphi_2(xs)\varphi_2(sy)\,ds \\ \varphi_4(xy) = \int \varphi_3(xs)\varphi_2(sy)\,ds = \int \varphi_2(xs)\varphi_3(sy)\,ds \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \varphi_m(xy) = \int \varphi_{m-1}(xs)\varphi_2(sy)\,ds = \int \varphi_2(xs)\varphi_{m-1}(sy)\,ds. \end{cases}$$

Nous disons maintenant que les autres relations ($21a$) de la première série *sont des conséquences de celles-ci*. En effet considérons la relation

$$\varphi_{p+q-1}(xy) = \int \varphi_p(xs)\varphi_q(sy)\,ds.$$

Si nous remplaçons $\varphi_p(xy)$ par sa valeur $\int \varphi_{p-1}(xs)\varphi_2(sy)\,ds$

tirée de (23 b), on obtient :

$$\varphi_{p+q-1}(xy) = \int \varphi_{p-1}(xs)\varphi_2(st)\varphi_q(ty)ds\,dt = \int \varphi_{p-1}(xs)\varphi_{q+1}(sy)ds.$$

On peut donc augmenter ou diminuer d'une unité les indices p et q ; l'application répétée de cette opération, réduira donc toute relation (21 a) à l'une quelconque des relations (23 b).

De même pour le second groupe (21 b) ; par l'application répétée de la même opération on pourra rendre toujours un des indices égal à m ; nous aurons les m identités :

$$\int \varphi_m(xs)\varphi_k(sy)ds = 0 \qquad (k = 2, \ldots m)$$

dont la première seule :

$$(24) \qquad \int \varphi_m(xs)\varphi_2(sy)ds = 0$$

est distincte ; les autres en sont des conséquences. En effet :

$$\int \varphi_m(xs)\varphi_k(sy)ds = \int \varphi_1(xs)\varphi_2(st)\varphi_{k-1}(sy)dt\,ds \equiv 0.$$

Pour énoncer simplement les résultats auxquels nous sommes parvenus, nous dirons d'abord que les fonctions φ et ψ forment un système *de fonctions principales* et nous remarquerons ensuite que les formules (23 b) expriment en réalité que les noyaux $\varphi_k(xy)(k > 2)$ s'obtiennent de $\varphi_2(xy)$ par itérations successives ; la condition (24) peut enfin s'énoncer en disant que le $m - 1$ noyau itéré de $\varphi_2(xy)$ est identiquement nul.

On peut alors résumer les résultats obtenus sous la forme suivante :

a) *La fonction $\varphi_1(xy)$ est une somme de produits de fonctions associés d'un système biorthogonal ; on a :*

$$(24') \qquad \varphi_2(xy) = \sum_{p=1}^{n} \varphi_p(x)\psi_p(y).$$

b) La fonction $\varphi_2(xy)$ est une forme bilinéaire des fonctions principales ; on a :

$$\varphi_2(xy) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\varphi_i(x)\psi_k(y) \tag{24'}$$

c) Les autres fonctions $\varphi_k(xy)$ s'obtiennent de $\varphi_2(xy)$ par itérations successives ; si le pôle est d'ordre m, le $m - 1$ noyau itéré de $\varphi_2(xy)$ est identiquement nul.

Réciproquement, la méthode suivie nous montre, qu'étant donné un système biorthogonal de $2n$ fonction φ et ψ, un tableau de constantes $| a_{ik} |$ tel que le $m - 1$ noyau itéré ($m \leqslant n$) de $\sum a_{ik}\varphi_i(x)\psi_k(y)$ soit nul identiquement, la fonction $G_1(xy)$ formée avec ces éléments d'après la formule (15) sera bien la partie caractéristique d'un noyau, relative à un pôle d'ordre m.

III. — LE SECOND ET LE TROISIÈME THEORÈMES DE FREDHOLM

8. L'étude directe des noyaux de la forme $\sum_{p=1}^{n} a_p(x)\, b_p(y)$; rang d'une valeur caractéristique. — Nous placerons à la tête de ce chapitre l'étude directe faite par MM. E. Goursat [1] et E. Schmidt [2] des noyaux de la forme

$$N(xy) = a_1(x)b_1(y) + \dots + a_p(x)b_p(y) + \dots + a_n(x)b_n(y) \tag{25}$$

tant en raison de sa simplicité que pour son importance intrinsèque.

Le noyau $G_1(xy)$ qui correspond au pôle multiple λ_1, étant aussi un noyau de cette forme, nous aurons à en tirer partie pour l'équation générale.

---

(1) E. Goursat, *Sur un cas élémentaire de l'équation de Fredholm* (Bulletin de la Soc. Math. de France, t. 35, 1907, pag. 167-173).

(2) E. Schmidt, *Entwickl. willk. funct. II Teil* Math. Ann. Bd. 64, pag. 161-174).

L'équation de Fredholm s'écrira dans ce cas

$$(25') \quad \begin{cases} \varphi(x) + \lambda \left[a_1(x) \int b_1(s)\varphi(s)ds + a_2(x) \int b_2(s)\varphi(s)ds + \ldots \right. \\ \left. \qquad + a_n(x) \int b_n(s)\varphi(s)ds \right] = f(x). \end{cases}$$

En posant :

$$(26) \qquad \mathrm{K}_p = \int b_p(s)\varphi(s)ds$$

nous voyons que $\varphi(x)$ est de la forme

$$(27) \quad \varphi(x) = f(x) - \lambda [\mathrm{K}_1 a_1(x) + \mathrm{K}_2 a_2(x) + \ldots + \mathrm{K}_n a_n(x)].$$

Pour déterminer les constantes K_p, remplaçons la valeur (27) de $\varphi(x)$ dans les équations (26) ; ceci nous donne les n équations linéaires à n inconnues

$$(28) \quad \begin{cases} \mathrm{K}_p + \lambda \left[\mathrm{K}_1 \int a_1(s) b_p(s)ds + \mathrm{K}_2 \int a_2(s) b_p(s)ds + \ldots \right. \\ \left. \qquad + \mathrm{K}_n \int a_n(s) b_p(s)ds \right] = \int f(s) b_p(s)ds \quad (p = 1, 2, \ldots n) \end{cases}$$

dont le déterminant est

$$\mathrm{D}(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 + \lambda\alpha_{11} & \lambda\alpha_{12} & \ldots & \lambda\alpha_{1n} \\ \lambda\alpha_{21} & 1 + \lambda\alpha_{22} & \ldots & \lambda\alpha_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda\alpha_{n1} & \lambda\alpha_{n2} & \ldots & 1 + \lambda\alpha_{nn} \end{vmatrix}$$

en posant

$$\alpha_{pq} = \int a_p(s) b_q(s)ds.$$

La théorie des équations linéaires, appliquée au système (28) nous permet donc d'énoncer les résultats suivants :

a) Si le déterminant caractéristique $\mathrm{D}(\lambda)$ *est* $\neq 0$, le système (28) admet un seul système de solutions ; donc dans ce cas *l'équation de Fredholm* (25') *admet une solution et une seule* donnée par l'expression (27).

b) *Si* $D(\lambda_1) = 0$ — ce qui a lieu pour n valeurs de λ — ce sont les équations linéaires (28) homogènes qui admettent des solutions. Si l'ordre du mineur principal du système (28) est r, pour $\lambda = \lambda_1$ (le mineur est un déterminant d'ordre $n - r$), la solution générale du système sera de la forme :

$$K_p = \rho_1 m_{1p} + \rho_2 m_{2p} + \dots + \rho_r m_{rp} \qquad (p = 1, \dots, n)$$

$\rho_1\, \rho_2 \dots \rho_r$ étant des paramètres arbitraires. Remplaçant les valeurs des K_p ainsi obtenues dans l'expression (27) de $\varphi(x)$ (où l'on doit faire $f(x) = 0$) nous obtenons

$$\varphi(x) = -\lambda_1 [\rho_1 \varphi_1(x) + \rho_2 \varphi_2(x) + \dots + \rho_r \varphi_r(x)]$$

et les fonctions

$$\varphi_q(x) = m_{q1} a_1(x) + m_{q2} a_2(x) + \dots + m_{qn} a_n(x) \quad (q = 1, \dots, r)$$

sont linéairement indépendantes.

Dans ce cas donc, c'est *l'équation homogène, sans second membre qui admet r solutions linéairement indépendantes.*

On les appelle, *les solutions fondamentales* de l'équation intégrale (25').

Nous appellerons *rang d'une valeur caractéristique*, le nombre des solutions fondamentales linéaires indépendantes que l'équation homogène possède pour $\lambda = \lambda_1$. Dans notre cas, le rang de λ_1 est r.

c) L'équation associée

$$\psi(x) - \lambda \int [a_1(s) b_1(x) + \dots + a_n(s) b_n(x)] \psi(s) ds = f(x)$$

s'obtient de (25') en échangeant les fonctions $a_q(x)$ et $b_q(x)$ entre elles. Le terme général du déterminant caractéristique de (25') étant

$$\alpha_{ik} = \int a_i(s) b_k(s) ds,$$

celui pour l'équation associée sera

$$\int b_i(s) a_k(s) ds = \alpha_{ki}.$$

Les déterminants caractéristiques sont donc identiques, puisqu'on déduit l'un de l'autre par l'échange des lignes avec les colonnes.

L'équation associée a donc exactement les mêmes valeurs caractéristiques, chacune avec la même multiplicité et le même rang.

d) Considérons maintenant l'équation (25′) — pour une valeur caractéristique λ_1 —, *mais avec second membre non nul*. Pour que les équations (28) soient compatibles, il faut et il suffit que les déterminants bordés, formés avec le mineur principal, soient tous nuls. Il y en a r pareils déterminants ; par conséquent il y a, au plus, r conditions indépendantes. Au lieu de les obtenir directement par la méhode algébrique, remarquons que si l'on multiplie par $\psi_p(x)\,dx$ l'équation

$$f(x) = \varphi(x) + \lambda_1 \int \mathrm{N}(xs)\,\varphi(s)\,ds$$

on obtient par intégration

$$\left.\begin{aligned}\int f(s)\psi_p(s)ds &= \int \varphi(s)\psi_p(s)ds + \lambda_1 \int \psi_p(x)\mathrm{N}(xs)\varphi(s)dsdx\\ &= \int \varphi(s)\psi_p(s)ds - \lambda_1 \int \frac{\psi_p(s)\varphi(s)}{\lambda_1}ds = 0\end{aligned}\right\}(p=1,..,r)$$

ce qui nous donne r conditions nécessaires distinctes ; elles sont aussi *suffisantes* parce que les conditions données par les déterminants bordés sont exactement de la même forme et ne sont pas plus nombreuses.

9. Fonctions fondamentales ; noyau canonique. — Reprenons maintenant l'étude du noyau $\mathrm{G}_1(xy)$. Nous avons vu dans le chapitre précédent, comment on est conduit à la notion des fonctions principales. Ces fonctions ne sont évidemment définies qu'à une substitution biorthogonale près ; une question qui se pose à présent, est à profiter de cette indétermination, pour rendre le système particulièrement simple. Cette question, d'après un artifice à présent classique, revient au

problème de la réduction à la forme canonique, de la forme bilinéaire [1]

(29) $$\lambda \varphi_1(xy) + \varphi_2(xy).$$

Or, il est facile de montrer que son discriminant

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda + a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \lambda + a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \lambda + a_{nn} \end{vmatrix}$$

est identiquement égal à λ^n.

En effet, si l'on prend $\varphi_2(xy)$ comme noyau d'une équation intégrale, son déterminant caractéristique aura pour terme général, d'après les propriétés précédentes :

$$\alpha_{ik} = \int \varphi_i(s)\,[a_{k1}\psi_1(s) + \dots + a_{kp}\psi_p(s) + \dots + a_{kn}\psi_n(s)]\,ds = a_{ki}.$$

Le déterminant caractéristique de $\varphi_2(xy)$ est donc $\lambda^n \Delta\left(\frac{1}{\lambda}\right)$; or, il est identiquement égale à 1, puisque $\varphi_2(xy)$ est un noyau *sans constante caractéristique*, son $n - 1$ noyau itéré étant identiquement nul. On a donc bien $\Delta(\lambda) = \lambda^n$.

Le cas le plus simple est celui où le déterminant $\Delta(\lambda)$ n'a qu'un seul diviseur élémentaire ; le déterminant canonique à un seul diviseur élémentaire est

(30) $$\begin{vmatrix} \lambda & a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & a_2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & a_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{vmatrix}$$

Il existera donc dans ce cas une double substitution linéaire qui transforme (29) en :

$$\lambda\,[\Phi_1(x)\Psi_1(y) + \dots + \Phi_p(x)\Psi_p(y) + \dots + \Phi_n(x)\Psi_n(y)] \\ + a_1\Phi_1(x)\Psi_2(y) + \dots + a_{n-1}\Phi_{n-1}(x)\Psi_n(y)].$$

---

[1] Cette théorie est magistralement exposée suivant les idées de M. G. Darboux, dans le mémoire :

L. Sauvage, *La théorie des systèmes des équations différentielles linéaires.* (Annales de la Fac. de Toulouse, 1894).

Les nouvelles fonctions Φ et Ψ forment aussi un système biorthogonal, puisque $\varphi_1(xy)$ a conservé exactement la même forme ; quant à $\varphi_2(xy)$, elle a pris la forme canonique

$$(31) \qquad \varphi_2(xy) = \sum_{1}^{n-1} a_p \Phi_p(x) \Psi_{p+1}(y),$$

les constantes a_p *étant différentes de zéro* mais autrement arbitraires. Nous les appellerons *les fonctions fondamentales relatives à la valeur caractéristique* λ_1. Les autres fonctions s'obtiennent dès lors par itération ; on a

$$(32) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \varphi_3(xy) = \sum_{1}^{n-2} a_p a_{p+1} \Phi_p(x) \Psi_{p+2}(y) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_n(xy) = a_1 a_2 \ldots a_p \Phi_1(x) \Psi_n(y) \end{array} \right.$$

$$\varphi_{n+1}(xy) \equiv 0.$$

Le pôle λ_1 est donc dans ce cas d'ordre n.

Le noyau ainsi obtenu

$$(33) \qquad \frac{\varphi_n(xy)}{(-\lambda_1)^n} + \frac{\varphi_{n-1}(xy)}{(-\lambda_1)^{n-1}} + \ldots + \frac{\varphi_1(xy)}{-\lambda_1}$$

admettant le noyau résolvant

$$(33') \qquad \frac{\varphi_n(xy)}{(\lambda - \lambda_1)^n} + \frac{\varphi_{n-1}(xy)}{(\lambda - \lambda_1)^{n-1}} + \ldots + \frac{\varphi_1(xy)}{(\lambda - \lambda_1)}$$

sera appelé *noyau canonique d'ordre n*.

Solutions fondamentales. — Si nous remplaçons les expressions (33) et (33') dans les équations du noyau résolvant

$$G(xy) - G(xy\lambda) = \lambda \int G(xs) G(sy\lambda)\, ds = \lambda \int G(xs\lambda) G(sy)\, ds,$$

l'identification des termes en $(\lambda - \lambda_1)^{-n}$ nous donne

$$\varphi_n(xy) + \lambda_1 \int G(xs) \varphi_n(sy)\, ds = 0$$

$$\varphi_n(xy) + \lambda_1 \int \varphi_n(xs) G(sy)\, ds = 0.$$

Ces relations, en tenant compte de l'expression (32) de $\varphi_n(xy)$ nous montre que :

$\Phi_1(x)$ *est une solution fondamentale de l'équation intégrale donnée et* $\Psi_n(y)$ *une solution fondamentale de l'équation associée.* Comme le rang de λ_1 est dans ce cas égal à 1, puisque $D(\lambda)$ n'a qu'un seul diviseur élémentaire, *ce sont les seules*. Le noyau canonique jouit donc, en résumant, des propriétés suivantes :

L'ordre de la valeur caractéristique comme pôle est égal à sa multiplicité ; le rang est égal à 1. Son expression à l'aide des fonctions fondamentales contient $n - 1$ constantes arbitraires. Ainsi le noyau canonique général du premier ordre est :

$$\frac{\Phi_1(x)\Psi_1(y)}{\lambda - \lambda_1};$$

celui du second ordre sera :

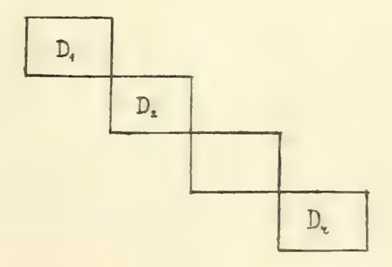
$$\frac{\Phi_1(x)\Psi_1(y) + \Phi_2(x)\Psi_2(y)}{\lambda - \lambda_1} + \frac{a_1\Phi_1(x)\Psi_2(y)}{(\lambda - \lambda_1)^2}$$

et ainsi de suite. Pour trouver son expression générale à l'aide d'un système de fonctions principales, on n'a qu'à appliquer aux fonctions fondamentales une substitution biorthogonale quelconque.

10. Fonctions fondamentales ; cas général. — Il est maintenant facile de passer au cas général. Supposons que le déterminant a r diviseurs élémentaires :

$$\lambda^n = \lambda^{n_1}\lambda^{n_2} \dots \lambda^{n_r}.$$

Dans ce cas, le déterminant canonique aux mêmes diviseurs élémentaires est



D_1 D_2 ... D_r désignant les déterminants canoniques de la forme (30) aux seuls diviseurs élémentaires λ^{n_1}, λ^{n_2}, ... λ^{n_r} respectivement. On aura :

$$D_1 = \begin{vmatrix} \lambda a_1 & & & & \\ & \lambda a_2 & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & \lambda a_{n_1-1} & \\ & & & & \lambda \end{vmatrix} \quad D_2 = \begin{vmatrix} \lambda b_1 & & & & \\ & \lambda b_2 & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & \lambda b_{n_2-1} & \\ & & & & \lambda \end{vmatrix} \quad D_r = \begin{vmatrix} \lambda l_1 & & & & \\ & \lambda l_2 & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & \lambda l_{n_r-1} & \\ & & & & \lambda \end{vmatrix}$$

La forme canonique de $\varphi_2(xy)$ sera donc dans ce cas

$$\varphi_2(xy) = \sum_{p=1}^{r} \varphi_2^p(xy)$$

en posant :

$$\varphi_2^1(xy) = \sum_{p=1}^{n_1-1} a_p \Phi_p^1(x) \Psi_{p+1}^1(y)$$

$$\varphi_2^2(xy) = \sum_{1}^{n_2-1} b_p \Phi_p^2(x) \Psi_{p+1}^2(y)$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\varphi_2^r(xy) = \sum_{1}^{n_r-1} l_p \Phi_p^r(x) \Psi_{p+1}^r(y).$$

Nous obtenons donc dans ce cas, $2n$ fonctions principales spéciales que nous appelerons aussi *fonctions fondamentales* qui se séparent en r groupes de $2n_1$, $2n_2$ ... $2n_r$, *chaque groupe fournissant la forme génératrice d'un noyau canonique d'ordre n_1, n_2, ... n_r respectivement*. En effet, si nous formons $\varphi_3(xy)$ on a :

$$\varphi_3(xy) = \varphi_3^1(xy) + \varphi_3^2(xy) + \ldots + \varphi_3^r(xy)$$

puisque toutes les fonctions d'un groupe sont *orthogonales aux fonctions associées* [1] *des autres groupes.*

---

[1] Les fonctions associées sont celles qui ont les deux indices respectivement égaux.

On a donc ce résultat important :

Dans le cas général, *le noyau* $G_1(xy)$ *est la somme d'un nombre fini de noyaux canoniques orthogonaux entre eux, d'ordre* $n_1, n_2 \ldots n_r$:

$$(34)\quad G_1(xy) = G_1^1(xy) + G_1^2(xy) + \ldots + G_1^r(xy),$$
$$n = n_1 + n_2 + \ldots + n_r.$$

L'ordre de λ_1 comme pôle est égal au plus grand des nombres $n_1, n_2 \ldots n_r$; si m est cet ordre, on a évidemment d'après (34) l'inégalité :

$$n \geqslant m + r - 1.$$

L'égalité n'a lieu que dans deux cas : si le pôle est du premier ordre ou s'il n'y a qu'un seul noyau canonique d'ordre m, les autres étant tous du premier ordre.

Solutions fondamentales. Chaque noyau canonique composant a un seul groupe de solutions fondamentales distinctes.

La solution $\Phi^p{}_1(x)$ étant orthogonale à toutes les fonctions Ψ des autres noyaux, on aura :

$$\int G_1^q(xy)\,\Phi_1^p(s)\,ds = 0$$

pour toutes les valeurs de q sauf p. Par conséquent, puisque

$$\Phi_1^p(x) + \lambda_1 \int G_1^p(xs)\,\Phi_1^p(s)\,ds = 0$$

on aura aussi

$$\Phi_1^p(x) + \lambda_1 \int G_1(xs)\,\Phi_1^p(s)\,ds = 0.$$

Le même raisonnement pour $\Psi_n^p(y)$.

L'équation homogène a donc dans le cas général r solutions linéairement indépendantes : ce sont les premières fonctions fondamentales Φ de chaque groupe.

Il en est de même de l'équation associée : ce sont les dernières fonctions Ψ de chaque groupe.

Il existe donc *parmi les fonctions fondamentales* un système de $2r$ fonctions qui sont des *solutions fondamentales*, r pour l'équation intégrale donnée et r pour son associée.

Faisons encore la remarque :

Le rang de la valeur caractéristique est égal au nombre des noyaux canoniques composants.

11. Le cas du pôle simple. — Lorsque le pôle λ_1 est simple, la partie caractéristique du noyau est simplement :

$$\frac{\varphi_1(xy)}{\lambda - \lambda_1}$$

où l'on a :

$$\varphi_1(xy) = \sum_{p=1}^{n} \varphi_p(x)\psi_p(y).$$

Le noyau est dans ce cas la somme de n noyaux canoniques du premier ordre ; les fonctions $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ sont donc des solutions fondamentales de l'équation intégrale donnée et $\psi_1(y)$, $\psi_2(y) \ldots \psi_n(y)$ de l'équation associée.

Dans le cas d'un pôle simple, *les solutions fondamentales coïncident avec les fonctions fondamentales.*

Cette propriété très importante, qui caractérise d'ailleurs le cas du pôle simple, rend utile un critérium permettant de distinguer ce cas.

Pour cela remarquons simplement que si l'un des noyaux composants $G_1^p(xy)$ est d'ordre plus grand que l'unité, les solutions $\Phi_1^p(x)$ et $\Psi_{n_p}^p(y)$ sont orthogonales, puisqu'elles ne sont pas des fonctions fondamentales associées ($n_p > 1$). Il résulte que $\Phi_1^p(x)$ est orthogonale à toutes les solutions fondamentales de l'équation associée. Dans le cas d'un pôle multiple il existe donc des solutions fondamentales, orthogonales à toutes les solutions fondamentales de l'équation associée.

Or ceci n'a pas lieu pour le noyau à pôle simple, car à chaque solution $\Phi_p(x)$ on a la solution associée $\Psi_p(x)$ telle que

$$\int \Phi_p(s)\Psi_p(s)\,ds = 1.$$

Donc, *la condition nécessaire et suffisante pour qu'un pôle soit simple est qu'à chaque solution fondamentale $\Phi(x)$ de l'équation*

correspondant à ce pôle, il existe une solution $\Psi(x)$ de l'équation associée telle que :

$$\int \Phi(s)\Psi(s)\,ds \neq 0.$$

12. Le cas des pôles multiples. — Dans le cas d'un pôle multiple, écrivons le noyau canonique d'ordre n sous la forme :

$$\Phi_1(xy) + \Phi_2(xy)$$

en posant :

$$\Phi_1(xy) = \frac{1}{\lambda_1}\sum_1^n \varphi_p(x)\psi_p(y)$$

qui se présente aussi dans le cas d'un pôle simple.

L'autre partie $\Phi_2(xy)$ est un noyau sans constante caractéristique.

En effet si l'on prend les divers noyaux itérés de $\Phi_2(xy)$, il est évident que le $n - 1$ noyau itéré sera nul, parce que ses divers termes seront les noyaux itérés de $\varphi_2(xy)$ d'ordre $\geqslant n - 1$ d'après les propriétés des fonctions $\varphi_p(xy)$.

Une conséquence de cette remarque est la suivante :

Si un noyau a un nombre fini n de valeurs caractéristiques, de multiplicité quelconques, on pourra toujours l'écrire sous la forme

$$\sum_{p=1}^n \frac{\varphi_p(x)\psi_p(y)}{\lambda_p} + E(xy)$$

$E(xy)$ étant un noyau sans valeur caractéristique.

Pour l'établir, il suffit encore de remarquer que les diverses parties $\Phi_2(xy)$ sont orthogonales au noyau sans constante caractéristique, ajouté à la forme normale.

13. Le second théorème de Fredholm. — Ce théorème est pour ainsi dire déjà démontré dans ce qui précède. Il suffit encore de démontrer que les équations :

$$\varphi(x) + \lambda_1 \int N(xs)\varphi(s)\,ds = 0 \qquad (36)$$

et

$$\varphi(x) + \lambda_1 \int G_1(xs)\varphi(s)ds = 0 \tag{37}$$

sont *réciproques*.

En effet, remarquons d'abord que, pour une solution $\varphi(x)$ de l'équation (37) on a :

$$\int P_1(xs)\varphi(s)ds = 0$$

comme cela résulte immédiatement en multipliant (37) par $P_1(yx)dx$ et intégrant, puisque les noyaux $G_1(xy)$ et $P_1(xy)$ sont orthogonaux. On aura donc aussi :

$$\varphi(x) + \lambda_1 \int \left[G_1(xs) + P_1(xs)\right] \varphi(s)ds = 0,$$

ce qui est justement l'équation (36).

Inversement, écrivons (36) sous la forme :

$$\varphi(x) + \lambda_1 \int P_1(xs)\varphi(s)ds = -\lambda_1 \int G_1(xs)\varphi(s)ds.$$

Puisque λ_1 n'est plus valeur caractéristique pour $P_1(xy)$ on peut résoudre cette équation ; ce qui nous donne :

$$\varphi(x) = -\lambda_1 \int G_1(xs)\varphi(s)ds + \lambda_1^2 \int \mathfrak{P}_1(xs\lambda)G_1(st)\varphi(t)dsdt$$

c'est-à-dire justement l'équation (37) puisque le second terme du second membre est identiquement nul, en vertu de la relation :

$$\int \mathfrak{P}_1(xs\lambda)G_1(st)ds \equiv 0.$$

On a ainsi le théorème suivant :

Pour une valeur caractéristique λ_1 de multiplicité n et rang r, c'est l'équation de *Fredholm homogène qui admet r solutions linéairement indépendantes, nommées solutions fondamentales. L'équation associée a exactement le même nombre de solutions fondamentales.*

C'est le *second théorème de Fredholm.*

14. Le troisième théorème de Fredholm. — Le raisonnement précédent nous montre de même que les équations

$$\varphi(x) + \lambda_1 \int N(xs)\,\varphi(s)\,ds = f(x)$$

et

$$\varphi(x) + \lambda_1 \int G_1(xs)\,\varphi(s)\,ds = f(x)$$

sont aussi réciproques ; elles seront donc compatibles en même temps.

Par conséquent (p. 52, n° **8**, *d*) :

La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation de Fredholm avec second membre $f(x)$ soit résoluble pour une valeur caractéristique $\lambda = \lambda_1$ est que $f(x)$ soit orthogonale à toutes les solutions fondamentales de l'équation associée relatives à λ_1.

C'est le *troisième théorème de M. Fredholm.*

IV. — DÉVELOPPEMENTS DIVERS.

15. Construction d'un noyau à un nombre fini de valeurs caractéristiques. — Les résultats du chapitre précédent nous permettent maintenant de traiter le problème suivant :

Déterminer la forme la plus générale d'un noyau à n valeurs caractéristiques de multiplicité et rang donnés.

Faisons pour cela d'abord la remarque suivante, comprise au fait, dans un théorème déjà établi.

Les parties d'un noyau, correspondant à deux valeurs caractéristiques différentes, sont orthogonales entre elles. En effet si l'on pose :

$$N(xy) = G_1(xy) + G_2(xy) + Q(xy)$$

le noyau $G_1(xy)$, orthogonal à $G_2(xy) + Q(xy)$, l'est aussi à $Q(xy)$ [1] ; il résulte de là que les noyaux $G_1(xy)$ et $G_2(xy)$ sont aussi orthogonaux.

---

[1] Cette dernière orthogonalité apparaît évidente si l'on extrait d'abord $G_2(xy)$.

Désignons maintenant par $G_p(xy)$ le noyau général correspondant à une valeur caractéristique λ_p de multiplicité et rang donnés, que nous savons construire (p. 54).

Il est évident que le noyau

$$G_1(xy) + G_2(xy) + \ldots + G_n(xy) + E(xy)$$

où $E(xy)$ désigne un noyau *sans constante caractéristique* sera le noyau cherché, à condition toutefois que les diverses parties soient orthogonales entre elles, en vertu de la remarque précédente.

Pour cela, il suffit d'abord que les fonctions fondamentales qui servent à la construction des noyaux $G_p(xy)$ forment dans leur ensemble, un seul système biorthogonal ; $E(xy)$ doit être ensuite aussi orthogonal à tous les noyaux $G_p(xy)$.

16. Le cas d'un nombre infini de valeurs caractéristiques. — Le raisonnement précédent se généralise évidemment pour le cas d'un nombre infini de valeurs caractéristiques, pourvu que la série

$$\sum_{1}^{\infty} G_p(xy)$$

soit convergente et intégrable par rapport aux variables x et y.

Une condition nécessaire est que l'exposant de convergence des valeurs caractéristiques soit au plus égal à deux ; en d'autres mots, la série $\sum \frac{1}{\lambda_n^{2+\varepsilon}}$ doit être convergente.

17. Noyau sans constante caractéristique. — Le noyau

$$\varphi_2(xy) = a_1\Phi_1(x)\Psi_2(y) + \ldots + a_{n-1}\Phi_{n-1}(x)\Psi_n(y)$$

nous a déjà fourni un exemple de noyau sans valeur caractéristique. Plus généralement si la série

$$E(xy) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\Phi_n(x)\Psi_{n+1}(y)$$

converge uniformément, elle sera aussi un noyau sans constante caractéristique car toutes ses traces sont nulles ; les fonctions Φ et Ψ sont supposées formant les deux groupes d'un

système biorthogonal. En appliquant aux fonctions Φ et Ψ une substitution biorthogonale quelconque, on obtiendra une classe très étendue de noyaux sans constante caractéristique.

Voici quelques exemples :

Prenons

$$\Phi_n(x) = \cos nx \quad , \quad \Psi_n(y) = \cos ny \quad \text{et} \quad \sum |a_n| = A,$$

on obtient le noyau (1)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \cos(n+1)y.$$

De même prenons

$$\Phi_{2n}(x) = \Psi_{2n}(x) = \sin nx \qquad \Phi_{2n-1}(x) = \Psi_{2n-1}(x) = \cos nx,$$

on obtient le noyau (1)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \sin ny.$$

---

(1) E. Goursat (Annales de Toulouse, pages 87-88).

CHAPITRE III.

—

NOYAUX SPÉCIAUX

I. — LE NOYAU SYMÉTRIQUE.

1. — C'est à M. D. Hilbert que revient le mérite d'avoir mis en évidence le rôle de la symétrie du noyau dans la théorie des équations intégrales. Il a étudié complètement ce cas ; ses élèves, M. E. Schmidt en particulier, l'ont aidé à donner aux résultats, des formes particulièrement simples.

2. Le théorème de M. D. Hilbert. — *Tout noyau symétrique a au moins une valeur caractéristique.* — Ce théorème a été démontré pour la première fois par M. D. Hilbert [1] ; M. E. Schmidt lui en a donné une démonstration directe en le prenant comme théorème fondamental [2].

Pour le démontrer, il suffit de faire voir que $n_4 \neq 0$. Or, on a

$$n_4 = \int [N_1(s_1 s_2)]^2 ds_1 ds_2$$

D'autre part, le noyau $N_1(s_1 s) = \int N(s_1 s_2)\, N(s s_2) ds$ ne peut pas être identiquement nul dans tout le carré d'intégration, puisque en particulier pour $s_1 = s_2$ on a

$$N_1(s_1 s_1) = \int [N(s_1 s)]^2 ds$$

On a donc bien $n_4 \neq 0$.

---

(1) D. Hilbert, *Grundzüge*, I, Mitt. (page 72).
(2) E. Schmidt, *Entwicklung willk. Functionen.* I. Teil. *Math. Ann.* (Bd. 63, page 455).

On peut encore énoncer ce théorème ainsi :

Un noyau sans valeur caractéristique ne peut pas être symétrique.

Remarque. — Nous excluons les noyaux discontinus, différents de zéro seulement dans un ensemble d'aire nulle à l'intérieur du carré d'intégration ; pour ces noyaux le théorème précédent n'est plus vrai. Prenons par exemple le noyau nul partout dans le carré (01, 01) sauf sur la diagonale (1) et sur un nombre fini de paires de droites parallèles aux axes et se rencontrant sur la diagonale, où il a des valeurs positives. Pour ce noyau on a :

$$n_1 = \int N(ss)\,ds = a^2$$

et

$$n_2 = \int N(s_1 s_2)^2 ds_1 ds_2 = 0$$

puisque la fonction $N(s_1 s_2)$ n'est différente de zéro que sur un nombre fini de droites ; on aura de même $n_p = 0$, $p > 2$ ce qui nous montre que

$$D(\lambda) = e^{a^2 \lambda}.$$

3. Propriétés des valeurs caractéristiques. — *a) Les valeurs caractéristiques sont réelles.* — Supposons en effet λ_1 complexe et soit $\varphi_1(x)$ une solution fondamentale relative à ce pôle ; le noyau $N(xy)$ étant réel, $\overline{\lambda_1}$ (¹) sera aussi une valeur caractéristique avec $\overline{\varphi_1}(x)$ comme solution fondamentale relative, tant pour l'équation donnée que pour son associée. Si maintenant $\lambda_1 \neq \overline{\lambda_1}$, on devait avoir

$$\int \varphi_1(x)\,\overline{\varphi_1}(x)\,dx = 0$$

ce qui est impossible. Il faut donc nécessairement $\lambda_1 \equiv \overline{\lambda_1}$, donc λ_1 réel.

(¹) $\overline{\lambda_1}$ représente la quantité imaginaire conjuguée de λ_1.

b) Les pôles du noyau résolvant sont simples, car une solution fondamentale $\varphi_1(x)$ l'est aussi pour son associée. Or on a

$$\int \varphi_1^2(x)\,dx \neq 0.$$

Les pôles sont donc simples (p. 58-59).

c) Les fonctions fondamentales coïncident ainsi avec les solutions fondamentales ; et comme, à cause de la symétrie, les solutions fondamentales sont les mêmes pour l'équation et son associée, il résulte que dans ce cas *les fonctions fondamentales forment un seul système orthogonal.*

d) Tout noyau symétrique à un nombre fini de valeurs caractéristiques, est nécessairement de la forme

$$(1) \qquad \frac{1}{\lambda_1}\varphi_1(x)\varphi_1(y) + \dots + \frac{1}{\lambda_n}\varphi_n(x)\varphi_n(y)$$

en écrivant chaque valeur caractéristique un nombre de fois égal à son rang.

En effet si nous extrayons de $N(xy)$ la partie caractéristique aux pôles $\lambda_1\ \lambda_2 \dots \lambda_n$ qui est justement l'expression (1), il reste un noyau toujours symétrique qui, par hypothèse, n'a plus aucune valeur caractéristique et est par suite nul.

4. L'inégalité de Bessel. — *Etant donné un système orthogonal de fonctions $\varphi_p(x)$ et f une fonction quelconque à carré intégrable* [1], *$f(x)$, on a l'inégalité*

$$c_1^2 + c_2^2 + \dots c_n^2 < \int f^2(x)\,dx$$

c_p étant le coefficient de Fourier $c_p = \int f(s)\varphi_p(s)\,ds$.

L'inégalité de Bessel résulte de l'égalité évidente

$$\int [f(x) - c_1\varphi_1(x) - c_2\varphi_2(x) - \dots - c_n\varphi_n(x)]^2 dx = \int f^2(x)\,dx - [c_1^2 + c_2^2 + \dots + c_n^2]$$

puisque le premier membre est essentiellement positif.

(1) C'est-à-dire telle que $\int f^2(x)\,dx$ existe.

On tire de là encore, la remarque importante.

Pour une fonction réelle, à carré intégrable, la série formée par les carrés de ses coefficients de Fourier, est convergente.

5. Propriétés des noyaux itérés. — 1° *Si λ_1 est une valeur caractéristique du noyau $N(xy)$, λ_1^{k+1} sera une valeur caractéristique du noyau itéré d'ordre k; les solutions fondamentales relatives à ces valeurs caractéristiques, sont les mêmes.*

En effet, remplaçons dans l'équation [1]

$$\varphi_1(x) - \lambda_1 \int N(xs)\varphi_1(s)\,ds = 0$$

$\varphi_1(x)$ sous le signe $\int$, par sa valeur tirée de cette équation même; on obtient

$$\varphi_1(x) - \lambda_1^2 \int N_1(xs)\varphi_1(s)\,ds = 0.$$

En appliquant k fois de suite la même opération, nous obtenons

$$\varphi_1(x) - \lambda_1^{k+1} \int N_k(xs)\varphi_1(s)\,ds = 0$$

ce qui démontre la propriété voulue.

2° Réciproquement, si *μ est une valeur caractéristique de $N_k(xy)$, le noyau $N(xy)$ admettra l'une au moins des racines k-mes de μ, comme valeur caractéristique.* En effet, soit α une de ces racines, et posons :

$$\psi(x) = \varphi_1(x) + \alpha \int N(xs)\varphi_1(s)\,ds + \alpha^2 \int N_1(xs)\varphi_1(s)\,ds + \dots$$
$$+ \alpha^{k-1} \int N_{k-1}(xs)\varphi_1(s)\,ds.$$

On a immédiatement

$$\psi(x) - \alpha \int N(xs)\psi(s)\,ds = \varphi_1(x) - \alpha^k \int N_k(xs)\varphi_1(s)\,ds = 0.$$

Or toutes les fonctions $\psi(x)$ ne peuvent pas être identique-

---

(1) Nous écrirons dans ce chapitre l'équation de Fredholm avec le signe — devant l'intégrale du noyau.

ment nulles à la fois, puisque leur somme est égale à $n\varphi_1(x)$. Le théorème est ainsi démontré.

3° *Si* $\lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \ldots \quad \lambda_n \ldots$
sont les valeurs caractéristiques du noyau $\mathrm{N}(xy)$, *le noyau itéré d'ordre k, aura comme valeurs caractéristiques*

$$\lambda_1^{k+1}, \quad \lambda_2^{k+1}, \quad \ldots \quad \lambda_n^{k+1} \ldots$$

et seulement celles-ci.

Il suffit d'appliquer les propriétés 1° et 2°.

6. Le développement en série de fonctions fondamentales. (Hilbert-Schmidt). — *Toute fonction continue* $f(x)$ *de la forme*

$$(a) \qquad \int \mathrm{N}(xs)\,h(s)\,ds$$

est développable dans une série régulièrement convergente de fonctions fondamentales du noyau $\mathrm{N}(xy)$; *la fonction* $h(x)$ *est à carré intégrable.*

Le coefficient de Fourier général est

$$c_n = \int \mathrm{N}(st)\varphi_n(t)\,h(s)\,ds\,dt = \frac{1}{\lambda_n}\int \varphi_n(s)\,h(s)\,ds = \frac{h_n}{\lambda_n}.$$

De sorte que, le théorème étant vrai, le développement cherché serait

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_n\varphi_n(x)}{\lambda_n}.$$

Nous démontrerons d'abord la convergence régulière de cette série. Remarquons pour cela qu'on a

$$\mathrm{R}_n^2 = \left|\frac{h_n\varphi_n(x)}{\lambda_n} + \ldots + \frac{h_m\varphi_m(x)}{\lambda_m}\right|^2 \leqslant [h_n^2 + \ldots + h_m^2] \left[\frac{\varphi_n^2(x)}{\lambda_n^2} + \ldots + \frac{\varphi_m^2(x)}{\lambda_m^2}\right]$$

Or l'expression

$$\frac{\varphi_n(x)}{\lambda_n} = \int \mathrm{N}(xs)\,\varphi_n(s)\,ds$$

est le coefficient de Fourier de la fonction de y $\mathrm{N}(xy)$: en vertu de l'inégalité de Bessel, la seconde parenthèse du second membre

est donc plus petite que $\int [N(xs)^2]ds$ et par conséquent plus petite qu'une quantité finie A. On a donc

$$R_n^2 < A[h_n^2 + h_{n+1}^2 + \dots + h_m^2]$$

ce qui démontre bien la convergence absolue et uniforme.

Il s'agit maintenant de montrer que cette série représente $f(x)$; nous démontrerons pour cela que la fonction

$$R(x) = f(x) - S(x)$$

est identiquement nulle.

Or, en vertu de la construction même de $S(x)$, la fonction $R(x)$ est orthogonale à toutes les fonctions fondamentales ; on a donc

$$\int R^2(s)ds = \int f(s)\,R(s)ds - \int S(s)\,R(s)ds = \int f(s)\,R(s)ds$$
$$= \int R(s)\,N(st)\,h(t)dsdt = \int h(t) \int N(st)R(s)dsdt \equiv 0$$

puisque ([1])

$$\int R(s)\,N(st)\,ds \equiv 0.$$

([1]) Cette relation serait immédiate si la série du noyau était convergente. On peut pourtant la démontrer par un procédé détourné, recourant au premier noyau itéré, de la manière suivante :

Le noyau $N_1(xy) = \int N(xs)\,N(sy)\,ds$ étant de la forme (a), on peut lui appliquer le raisonnement du texte ; il résulte que la série $S_1(xy)$ relative :

$$S_1(xy) = \frac{\varphi_1(x)\,\varphi_1(y)}{\lambda_1^2} + \dots + \frac{\varphi_n(x)\,\varphi_n(y)}{\lambda_n^2} + \dots$$

sera régulièrement convergente. Or le noyax $N_1(xy)$ n'a aucune autre valeur caractéristique que les carrés de celles de $N(xy)$; le noyau $N_1(xy) - S_1(xy)$ est donc nul, c'est-à-dire $N_1(xy) \equiv S_1(xy)$.

Maintenant, pour une fonction $R(x)$ orthogonale à toutes les fonctions fondamentales $\varphi_n(x)$. On aura :

$$\int N_1(xy)\,R(x)\,R(y)\,dxdy = \int ds \int N(xs)\,R(x)\,dx \int N(ys)\,R(y)\,dy$$
$$= \int \left[\int N(xs)\,R(x)\,dx \right]^2 ds$$

et par conséquent

$$\int N(xs)\,R(x)\,dx = 0.$$

Donc

$$R(s) \equiv 0.$$

7. Le noyau fermé. — *Un noyau symétrique est fermé s'il n'existe aucune fonction $h(x)$ à carré intégrable telle qu'on ait identiquement*

$$(2) \qquad \int N(xs)\, h(s)\, ds = 0.$$

Le système des fonctions fondamentales d'un noyau symétrique fermé est complet et vice-versa. En effet l'identité (2) et les relations $\int \varphi_n(s)\, h(s)\, ds = 0$ sont réciproques.

Le nombre des valeurs caractéristiques d'un noyau fermé est infini. — En effet s'il était fini, le nombre des fonctions fondamentales serait aussi fini. Or un système complet de fonctions orthogonales ne peut jamais être fini.

8. Le noyau défini. — Nous dirons qu'*un noyau symétrique est défini, s'il n'existe aucune fonction $h(x)$ à carré intégrable, telle qu'on ait*

$$(3) \qquad \int N(xy)\, h(x)\, h(y)\, dx\, dy = 0.$$

Un noyau défini est nécessairement fermé, car si l'on avait

$$\int N(xs)\, h(s)\, ds = 0$$

la condition (3) serait évidemment aussi remplie pour $h(x)$. *Les valeurs caractéristiques d'un noyau défini sont toutes de même signe.* — En effet supposons que les valeurs λ_n et λ_m soient de signes contraires ; si l'on prend maintenant

$$h(x) = a\varphi_n(x) + b\varphi_m(x)$$

on obtient

$$(4) \qquad \int N(xy)\, h(x)\, h(y)\, dx\, dy = \frac{a^2}{\lambda_n} + \frac{b^2}{\lambda_m}.$$

Comme les quantités λ_n et λ_m sont de signes contraires, le

second membre de (4) peut être rendu nul ; le noyau $N(xy)$ n'est donc pas défini dans ce cas.

Tout noyau itéré d'un noyau fermé est défini. — Prenons en effet

$$N_1(xy) = \int N(xs)N(sy)ds.$$

On ne peut pas avoir

$$\int N_1(xy)h(x)h(y)dxdy = 0$$

car on en déduirait

$$\int \left[\int N(xs)h(x)dx \right]^2 ds = 0$$

d'où

$$\int N(xs)h(x)dx = 0.$$

9. Noyau positif; noyau quasi-défini. — *Un noyau symétrique est positif si l'on a, pour toute fonction $h(x)$,* à carré intégrable,

$$\int N(xy)h(x)h(y)dxdy \geqslant 0.$$

Les valeurs caractéristiques d'un noyau positif sont toutes positives. En effet, en se reportant au raisonnement du n° **8**, si λ_n et λ_m avaient des signes contraires, le second membre de (4) pourrait prendre une valeur négative pour a et b convenablement choisies.

Si l'on a

$$\int N(xy)h(x)h(y)dxdy = 0$$

on a nécessairement

$$\int N(xy)h(y)dy = 0.$$

En effet, d'après le théorème de Hilbert-Schmidt, on a :

$$\int N(xs)h(s)ds = h_1\varphi_1(x) + \dots + h_n\varphi_n(x) + \dots$$

et par conséquent :

$$\int N(xy)h(x)h(y)dxdy = \frac{h_1^2}{\lambda_1} + \frac{h_2^2}{\lambda_2} + \dots + \frac{h_n^2}{\lambda_n} + \dots$$

d'où l'on déduit nécessairement :

$$h_n = 0 \qquad\qquad (n = 1, \dots \infty)$$

et par conséquent

$$\int N(xs)h(s)ds = 0.$$

Etant donné un noyau positif, il peut arriver deux cas : le nombre des fonctions $h(x)$ telles que

$$(4') \qquad \int N(xy)h(x)h(y)dxdy = 0$$

peut être fini ou bien infini. Dans le premier cas, nous dirons que le noyau est *quasi-défini*. On peut justifier cette définition, en remarquant qu'un noyau quasi-défini ne diffère d'un noyau défini que par une somme de la forme

$$C_1h_1(x)h_1(y) + \dots + C_nh_n(x)h_n(y).$$

En effet, si $h_1(x)$, $h_2(x)$ ... $h_n(x)$ désignent les fonctions linéairement indépendantes, en nombre fini, qui vérifient la relation (4'), il est évident que le noyau

$$N(xy) + C_1h_1(x)h_1(y) + \dots + C_nh_n(x)h_n(y) \qquad (C_i > 0)$$

ne vérifiera plus la relation (4') pour aucune fonction $h(x)$ et sera par conséquent *défini*. Un noyau quasi-défini a donc une infinité de valeurs caractéristiques positives [1].

10. L'ordre de $D(\lambda)$. — Dans le cas du noyau symétrique, on peut démontrer que *l'ordre est réellement plus petit que deux ; le genre est au plus égal à un.*

En effet, l'égalité :

$$N_1(xy) = \frac{\varphi_1(x)\varphi_1(y)}{\lambda_1^2} + \frac{\varphi_2(x)\varphi_2(y)}{\lambda_2^2} + \dots \dots + \frac{\varphi_n(x)\varphi_n(y)}{\lambda_n^2} + \dots$$

---

[1] Pour les noyaux positifs, voir un intéressant mémoire de M. J. Mercer (*Phil. Trans.* 1909. 209 A., page 415).

nous donne immédiatement :

$$(5) \qquad \int N_1(st)\,ds\,dt = \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{\lambda_2^2} + \dots + \frac{1}{\lambda_n^2} + \dots$$

D'autre part la formule de Weierstrass, applicable dans ce cas

$$D(\lambda) = e^{a\lambda + b\lambda^2} \prod_1^\infty \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_n}\right) e^{\frac{\lambda}{\lambda_n}}$$

nous donne, en passant aux logarithmes et identifiant :

$$\int N_1(st)\,ds\,dt = b + \sum_1^\infty \frac{1}{\lambda_n^2}.$$

La comparaison avec la formule (5), nous montre que $b = 0$. On a donc :

$$D(\lambda) = e^{a\lambda} \prod_1^\infty \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_n}\right) e^{\frac{\lambda}{\lambda_n}}.$$

Remarque. — Si la série du noyau [1]

$$\frac{\varphi_1(x)\varphi_1(y)}{\lambda_1} + \frac{\varphi_2(x)\varphi_2(y)}{\lambda_2} + \dots + \frac{\varphi_n(x)\varphi_n(y)}{\lambda_n} + \dots$$

est régulièrement convergente dans l'intervalle (ab), elle représente $N(xy)$, comme cela est bien évident. On aura donc, dans ce cas :

$$\int N(ss)\,ds = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} + \dots + \frac{1}{\lambda_n} + \dots$$

Un raisonnement analogue à celui qui précède, nous montre que la fonction $D(\lambda)$ dans ce cas est de *genre zéro*.

II. — LE NOYAU SYMÉTRIQUE GAUCHE.

Un noyau $N(xy)$ est symétrique gauche si l'on a

$$N(xy) \equiv - N(yx).$$

---

(1) Tel serait, d'après M. Mercer, le cas des noyaux positifs ou négatifs. (Phil. Trans., 209 A. 415, 1909).

Les noyaux symétriques gauches jouent dans la théorie des équations différentielles linéaires d'ordre impair le même rôle que les noyaux symétriques dans la théorie des équations différentielles linéaires d'ordre pair.

11. Propriétés des valeurs caractéristiques. *a) Les valeurs caractéristiques sont des imaginaires pures de la forme νi.* — En effet, soit λ_1 une valeur caractéristique et $\varphi_1(x)$ une solution fondamentale relative. On a :

$$\varphi_1(x) - \lambda_1 \int N(xs)\varphi_1(s)ds = 0$$

d'où l'on déduit

$$\varphi_1(x) + \lambda_1 \int N(sx)\varphi_1(s)ds = 0$$

et par conséquent

$$\overline{\varphi_1}(x) + \overline{\lambda_1} \int N(sx)\overline{\varphi_1}(s)ds = 0$$

Si donc $\overline{\lambda_1} \not\equiv -\lambda_1$, les fonctions $\varphi_1(x)$ et $\overline{\varphi_1}(x)$ seraient orthogonales, ce qui est impossible. On a donc nécessairement $\lambda_1 \equiv -\overline{\lambda_1}$, et par conséquent $\lambda_1 = \pm \nu i$.

b) Les pôles sont simples. — En effet si

$$\varphi_1(x) - \nu i \int N(xs)\varphi_1(s)ds = 0$$

on aura aussi

$$\overline{\varphi_1}(x) - \nu i \int N(sx)\overline{\varphi_1}(s)ds = 0.$$

Il résulte qu'à chaque solution $\varphi_1(x)$ il correspond la solution associée $\overline{\varphi_1}(x)$ telle que

$$\int \varphi_1(s)\overline{\varphi_1}(s)ds \not\equiv 0$$

ce qui montre que les pôles sont simples.

c) Chaque noyau symétrique gauche a au moins deux valeurs caractéristiques. — En effet, il a d'abord une valeur caractéris-

tique, puisque

$$n_4 = \int [\mathrm{N}_1(s_1 s_2)]^2 ds_1 ds_2$$

et le noyau

$$\mathrm{N}_1(s_1 s_1) = -\int [\mathrm{N}(s_1 s)]^2 ds$$

ne peut pas être identiquement nul.

Il en aura dans ce cas deux, car si νi est une valeur caractéristique avec $\varphi_1(x)$ comme solution fondamentale, $-\nu i$ en sera aussi une autre, avec $\overline{\varphi}_1(x)$ comme solution fondamentale. On peut énoncer ce théorème en disant :

Un noyau sans constante caractéristique ne peut pas être symétrique gauche.

d) Si $\varphi_1(x)$ *est une fonction fondamentale,* $\overline{\varphi_1}(x)$ *est la fonction fondamentale associée.* — Les pôles étant simples, la totalité des fonctions principales coïncide avec celle des solutions fondamentales. Si $\varphi_1(x)\ \varphi_2(x) \dots \varphi_n(x)$ sont n solutions linéairement indépendantes correspondant à la valeur λ_1 de rang n, les fonctions

$$\overline{\varphi}_1(x)\ \overline{\varphi}_2(x) \dots \overline{\varphi}_n(x)$$

seront n solutions aussi linéairement indépendantes de l'équation associée.

Cherchons maintenant à les biorthogonaliser d'après la méthode que nous avons indiquée (page 36). Remarquons d'abord qu'on pourra prendre $\Phi_1(x) = \varphi_1(x)$ et $\Psi_1(x) = \overline{\varphi}_1(x)$, car

$$\int \varphi_1(x)\,\overline{\varphi}_1(x)\,dx \neq 0\ ;$$

en outre les constantes a_i et b_i sont respectivement imaginaires conjuguées, car si l'on a :

$$\int \varphi_1(s)\left[\overline{\varphi}_p(s) - c_p\,\overline{\varphi}_1(s)\right] ds = 0$$

on aura aussi

$$\int \overline{\varphi}_1(s)\left[\varphi_p(s) - \overline{c}_p\,\varphi_1(s)\right] ds = 0$$

les fonctions restantes seront alors de la même forme :

$$\varphi'_2(x)\ \varphi'_3(x)\ \ldots\ \varphi'_n(x)$$
$$\overline{\varphi'_2}(x)\ \overline{\varphi'_3}(x)\ \ldots\ \overline{\varphi'_n}(x).$$

On pourra donc répéter le même procédé, ce qui démontre bien notre proposition.

e) Tout noyau symétrique gauche ayant un nombre fini de valeurs caractéristiques, est nécessairement de la forme

$$\frac{\varphi_1(x)\overline{\varphi_1}(y)}{\lambda_1}+\ldots+\frac{\varphi_n(x)\overline{\varphi_n}(y)}{\lambda_n}$$

en écrivant chaque racine un nombre de fois égal à son rang.

Pour démontrer ce théorème, nous ferons d'abord la remarque que, si d'un noyau symétrique gauche on extrait les parties caractéristiques relatives à deux valeurs caractéristiques *conjuguées* $\pm\nu i$, il reste un noyau qui est aussi symétrique gauche. En effet, soit :

$$\frac{\varphi_1(x)\overline{\varphi_1}(y)+\ldots+\varphi_n(x)\overline{\varphi_n}(y)}{\nu i}$$

la partie caractéristique de νi ; celle de $-\nu i$ sera alors

$$\frac{\overline{\varphi_1}(x)\varphi_1(y)+\ldots+\overline{\varphi_n}(x)\varphi_n(y)}{-\nu i}$$

et ces deux parties réunies :

$$\frac{\varphi_1(x)\overline{\varphi_1}(y)-\overline{\varphi_1}(x)\varphi_1(y)+\ldots+\varphi_n(x)\overline{\varphi_n}(y)-\overline{\varphi_n}(x)\varphi_n(y)}{\nu i}$$

forment une fonction symétrique gauche.

Si donc on extrait d'un noyau un nombre fini de valeurs caractéristiques, les parties caractéristiques de toutes ces valeurs, il restera un noyau symétrique gauche, sans constante caractéristique qui d'après (c) est nul.

Nous citerons comme exemple de noyau symétrique gauche le noyau $\sin n(x-y)$, avec les seules fonctions fondamentales correspondantes $e^{\mp nxi}$ et les valeurs caractéristiques $\mp\frac{i}{\pi}$ pour l'intervalle $(0, 2\pi)$.

12. L'inégalité de Bessel. — Dans le domaine complexe on peut obtenir une inégalité analogue à celle de Bessel.

Etant donné le système des fonctions fondamentales

$$\varphi_1(x)\overline{\varphi_1}(x)\varphi_2(x)\overline{\varphi_2}(x)\ldots\varphi_n(x)\overline{\varphi_n}(x)\ldots$$

d'un noyau symétrique gauche, on a

$$|c_1|^2 + |c_2|^2 + \ldots + |c_n|^2 < \int f(s)^2 ds$$

en désignant par

$$c_n = \int f(s)\overline{\varphi_n}(s)\,ds.$$

Cela résulte de l'égalité évidente

$$\int \left[f(s) - c_1\varphi_1(s) - \overline{c_1}\overline{\varphi_1}(s) - \ldots - c_n\varphi_n(s) - \overline{c_n}\overline{\varphi_n}(s)\right]$$

$$\left[f(s) - \overline{c_1}\varphi_1(s) - c_1\overline{\varphi_1}(s) - \ldots\right]ds = \int f(s)^2 ds - |c_1|^2 - \ldots - |c_n|^2$$

puisque le premier membre est essentiellement positif.

13. Le développement en série de fonctions fondamentales. — *Toute fonction $f(x)$ de la forme $\int N(xs)h(s)ds$ est développable dans une série régulièrement convergente de fonctions fondamentales ; la fonction $h(x)$ et le noyau sont des fonctions à carré intégrable.*

Les coefficients de Fourier généraux sont :

$$c_n = \int N(ts)h(s)\overline{\varphi_n}(t)\,dt\,ds = -\frac{\lambda_n}{\lambda_n}\int h(s)\overline{\varphi_n}(s)\,ds = -\frac{h_n}{\lambda_n} = \frac{h_n}{\lambda_n}$$

et par conséquent

$$\overline{c_n} = \frac{\overline{h_n}}{\overline{\lambda_n}}$$

de sorte que le théorème étant vrai, le développement cherché serait

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{h_n\varphi_n(x)}{\lambda_n} + \frac{\overline{h_n}\overline{\varphi_n}(x)}{\overline{\lambda_n}}\right]$$

Nous démontrerons d'abord la convergence régulière de cette série. Remarquons pour cela que l'on a [1] :

$$|S_m(x) - S_n(x)| < 4\left[|h_n|^2 + \dots + |h_m|^2\right]\left[\left|\frac{\varphi_n(x)}{\lambda_n}\right|^2 + \dots + \left|\frac{\varphi_m(x)}{\lambda_m}\right|^2\right]$$

La démonstration s'achève textuellement comme dans le cas du noyau symétrique.

D'une manière analogue, en vertu des propriétés c et e, il résulte *qu'un noyau symétrique gauche fermé a une infinité de valeurs caractéristiques.*

III. — LE NOYAU SYMÉTRISABLE.

14. Définitions, exemples. — Nous dirons qu'un *noyau est symétrisable, si on peut le rendre symétrique par la composition avec un noyau symétrique défini.*

Le noyau $N(xy)$ est symétrisable, s'il existe un noyau symétrique défini $G(xy)$ tel que

$$a)\ H_1(xy) = \int G(xs)N(sy)ds \quad \text{ou} \quad (b)\ H_2(xy) = \int N(xs)G(sy)ds$$

soit aussi symétrique.

Cette classe de noyaux a été signalée et étudiée par M. J. Marty [2] ; elle contient tous les noyaux spéciaux étudiés

---

[1] C'est une application de l'inégalité

$$(A_1\overline{B_1} + B_1\overline{A_1} + \dots + A_n\overline{B_n} + B_n\overline{A_n})^2 < 4(A_1\overline{A_1} + \dots + A_n\overline{A_n})(B_1\overline{B_1} + \dots + B_n\overline{B_n})$$

qui s'obtient en exprimant que la forme quadratique de λ

$$(A_1\lambda + B_1)(\overline{A_1}\lambda + \overline{B_1}) + \dots + (A_n\lambda + B_n)(\overline{A_n}\lambda + \overline{B_n})$$

est définie et positive.

[2] J. Marty, *Sur une équation intégrale* (CR. 150, p. 515. 1910); id., *Développement suivant certaines solutions singulières.* (Ibid., p. 605); id., *Existence des sol. p. certaines éq. de Fredholm.* (Ibid., p. 1031); id., *Valeurs singulières d'une équation de Fredholm.* (Ibid., p. 1499).

jusqu'à présent. C'est ainsi que le noyau polaire (Hilbert) [1] $A(x)G(xy)$ — $G(xy)$ symétrique et défini — est un noyau symétrisable, car le noyau :

$$\int G(xs)A(s)G(sy)ds$$

est symétrique [2]. Plus généralement $A(x)G(xy)B(y)$ (Goursat) est aussi symétrisable puisqu'il donne aussi un noyau symétrique par la composition en avant avec le noyau $B(x)G(xy)B(y)$ ou en arrière avec $A(x)G(xy)A(y)$.

Citons encore le noyau (Marty) $\int G(xs)G_1(sy)ds$ ou $G(xy)$ et $G_1(xy)$ sont symétriques et définies ; on le rendra symétrique par la composition en avant avec $G_1(xy)$ ou en arrière avec $G(xy)$.

15. Les solutions fondamentales associées. — Pour les noyaux symétrisables, il y a lieu de faire la remarque suivante :

Si $\varphi_1(x)$ est une solution fondamentale de l'équation intégrale donnée, l'expression

$$\psi_1(x) = \int G(xs)\varphi_1(s)ds$$

est une solution fondamentale de l'équation intégrale associée.

En effet, multiplions la relation

$$\varphi_1(t) - \lambda_1 \int N(ts)\varphi_1(s)ds = 0$$

par $G(xt)dt$ et intégrons ; on obtient

$$\psi_1(x) - \lambda_1 \int G(xt)N(ts)\varphi_1(s)dsdt = 0$$

---

(1) D. Hilbert, *Grundzüge*, 5te Mitt. (p. 462-472). M. D. Hilbert a étudié d'une façon complète les noyaux de ce type, la fonction $A(x)$ ayant un nombre fini de changements de signe ; il a donné à l'équation intégrale correspondante, le nom d'équation polaire ou de troisième espèce.

(2) Voir aussi G. Fubini, *Equazioni integrali e valori eccezionali*. (Annali di Mat. Juin 1910), et un mémoire tout récemment paru :

Anna Johnson Pell, *Applications of biorthogonal systems of functions to the theory of integral equations*. (Trans. of the Am. Mat. Soc. Avril 1911).

ou en vertu de la *symétrie* de $H(xy)$

$$\psi_1(x) - \lambda_1 \int G(st)\, N(tx)\, \varphi_1(s)\, ds dt = 0$$

ou encore, en tenant compte aussi de la sysmétrie de $G(xy)$

$$\psi_1(x) - \lambda_1 \int N(tx)\, \psi_1(t)\, dt = 0.$$

Remarque. — Une démonstration analogue nous montre que le même théorème subsiste pour les noyaux du type (b) ; il faut changer seulement entre eux, les mots « donnée » et « associée ».

16. Propriétés des valeurs caractéristiques. $a)$ *Les valeurs caractéristiques sont réelles.* — En effet, si λ_1 est une valeur caractéristique avec une solution fondamentale $\varphi_1(x)$, $\bar{\lambda}_1$ en sera une autre, avec la solution fondamentale $\bar{\varphi}_1(x)$; il résulte de là que, pour $\lambda_1 \neq \bar{\lambda}_1$, on devrait avoir

$$\int G(st)\, \varphi_1(s)\, \bar{\varphi}_1(t)\, ds dt = 0$$

ce qui est impossible, car en posant

$$\varphi_1(x) = p(x) + iq(x)$$

on en déduirait

$$\int G(st)\, p(s)\, p(t)\, ds dt + \int G(st)\, q(s)\, q(t)\, ds dt = 0$$

d'où

$$\int G(st) p(s)\, p(t)\, ds dt = \int G(st)\, q(s)\, q(t)\, ds dt = 0$$

d'où

$$\int G(xs)\, \varphi_1(s)\, ds = 0\ (^1).$$

Or, ce résultat est incompatible avec l'hypothèse de $G(xy)$ défini.

---

[1]) Voir les propriétés du noyau positif (page 71).

b) *Les pôles du noyau résolvant sont simples*, puisqu'à chaque solution fondamentale $\varphi_1(x)$ correspond une solution fondamentale $\int G(xs)\varphi_1(s)\,ds$ de l'équation associée et l'on a

$$\int G(xs)\varphi_1(x)\varphi_1(s)\,ds\,dx \neq 0$$

le noyau $G(xy)$ étant défini.

La totalité des fonctions fondamentales coïncide donc avec celle des solutions fondamentales.

Remarque. — Pour les noyaux polaires, ces propriétés subsistent, dans l'hypothèse plus générale où $G(xy)$ est seulement *positif*. En effet, dans ce cas, on a :

$$\int G(xs)\varphi_1(s)\,ds = \frac{\varphi_1(x)}{\lambda_1 A(x)} \neq 0 \tag{6}$$

ce qui entraîne nécessairement

$$\int G(xs)\varphi_1(s)\varphi_1(x)\,ds\,dx \neq 0. \tag{7}$$

Pour les noyaux symétrisables *en général*, ces propriétés ne sont plus vraies, si $G(xy)$ est seulement positif. Ainsi par exemple, si :

$$G(xy) = \frac{\varphi_1(x)\varphi_1(y)}{a^2}$$

on peut prendre

$$N(xy) = K(xy) + \frac{\psi_1(x)\varphi_1(y)}{\lambda_1}.$$

$K(xy)$ désignant un noyau *quelconque*, formé avec des fonctions fondamentales, orthogonales à $\varphi_1(x)$. Si

$$\int \varphi_1(s)\psi_1(s)\,ds = 1$$

on aura :

$$\int G(xs)N(sy)\,ds = \frac{\varphi_1(x)\varphi_1(y)}{a^2\lambda_1}$$

c'est-à-dire un noyau symétrique.

Donc le noyau $N(xy)$ est symétrisable avec un noyau positif, et pourtant il contient la partie $K(xy)$ de polarité quelconque et pouvant avoir comme valeur caractéristique, un nombre arbitraire.

c) Un noyau symétrisable a au moins une valeur caractéristique [1].

d) Si $\varphi_1(x)$ *est une solution fondamentale, l'expression* $\Psi_1(x) = \int G(xs)\varphi_1(s)\,ds$ *sera la solution fondamentale associée.*

Les pôles étant simples, la totalité des fonctions fondamentales coïncide avec celle des solutions fondamentales. Si $\varphi_1(x) \dots \varphi_n(x)$ sont n solutions linéairement indépendantes, correspondant à la valeur λ_1 de rang n, les fonctions

$$\psi_p(x) = \int G(xs)\varphi_p(s)\,ds \qquad (p = 1, 2, \dots n)$$

seront aussi n solutions *linéairement indépendantes* de l'équation associée, puisque $G(xy)$ est par hypothèse défini. Cherchons maintenant à les biorthogonaliser suivant la méthode déjà plusieurs fois employée. On peut d'abord prendre

$$\Phi_1(x) = \varphi_1(x) \qquad \text{et} \qquad \Psi_1(x) = \int G(xs)\varphi_1(s)\,ds$$

puisque

$$\int G(xs)\varphi_1(x)\varphi_1(s)\,dx\,ds > 0.$$

Remarquons maintenant que si l'on a

$$\int \Psi_1(x)[\varphi_p(x) - a_p\Phi_1(x)]\,dx = 0,$$

on aura aussi

$$\int G(xs)\Phi_1(s)[\varphi_p(x) - a_p\Phi_1(x)]\,ds\,dx$$

$$= \int \Phi_1(s)[\psi_p(s) - a_p\Psi_1(s)]\,ds = 0.$$

---

[1] Pour la démonstration de ce théorème, nous renvoyons le lecteur à la note de M. J. Marty, *Existence de sol. p. certaines éq. de Fredholm* (Comptes-Rendus, t. 150, page 1031 et la note suivante du même tome, page 1499).

ce qui nous montre que les fonctions restantes après la première opération, sont de la même forme que les fonctions initiales ; on pourra donc répéter le même procédé n fois de suite.

e) *Tout noyau symétrisable, à un nombre fini de valeurs caractéristiques, est nécessairement de la forme*

$$\frac{\varphi_1(x)\psi_1(y)}{\lambda_1} + \dots + \frac{\varphi_n(x)\psi_n(y)}{\lambda_n}.$$

En effet, si nous extrayons du noyau, les parties caractéristiques des pôles $\lambda_1, \dots \lambda_n$ qui forment justement l'expression précédente, il reste un noyau toujours symétrisable (d), qui par hypothèse n'a plus aucune valeur caractéristique. Donc, d'après (c), il est identiquement nul.

16. Inégalité de Bessel. — *Etant donnée une fonction $f(x)$ pour laquelle l'intégrale*

$$(\mathrm{G}) \qquad \int G(xs)f(s)f(x)\,ds\,dx$$

existe, on a :

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 < \int G(xs)f(x)f(s)\,ds\,dx$$

a_p étant le coefficient de Fourier :

$$a_p = \int f(s)\psi_p(s)\,ds.$$

Comme dans les cas précédents, cette inégalité découle de l'égalité :

$$\begin{aligned}\int G(xs)\,[f(x) - a_1\varphi_1(x) \dots - a_n\varphi_n(x)]\\ [f(s) - a_1\varphi_1(s) \dots - a_n\varphi_n(s)]\,ds\,dx\\ = \int G(xs)f(s)f(x)\,ds\,dx - a_1^2 - a_2^2 - \dots - a_n^2\end{aligned}$$

en remarquant que le premier membre est positif.

Il résulte de là que *la série*

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 + \dots$$

est convergente.

17. Théorème sur le développement des fonctions en série de fonctions biorthogonales. — *Toute fonction continue de la forme :*

$$(a) \qquad \int N(xs)\, h(s)\, ds \qquad \text{ou} \qquad (b) \qquad \int N(sx)\, h(s)\, ds$$

est développable dans une série régulièrement convergente suivant les fonctions $\varphi_n(x)$ dans le cas a, ou les fonctions $\psi_n(x)$ dans le cas b.

Dans cet énoncé, $N(xy)$ représente un noyau symétrisable des deux côtés ; $N(xy)$ et $h(x)$ sont des fonctions pour lesquelles l'intégrale (G) existe.

La démonstration suit de près celle que nous avons donnée dans le cas symétrique. Tout d'abord la série sera, dans le premier cas a :

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_n}{\lambda_n} \varphi_n(x)$$

où l'on a :

$$h_n = \int f(s)\, \psi_n(s)\, ds.$$

Cette série est régulièrement convergente ; en effet le raisonnement employé dans le cas symétrique subsiste puisque la série des h_n est, dans ce cas, aussi convergente.

La série $S(x)$ représente $f(x)$. En effet considérons la différence :

$$R(x) = f(x) - S(x).$$

On a :

$$\int G(xs)\, R(x)\, R(s)\, dxds = \int G(xs)\, R(s)\, f(x)\, dsdx - \int G(xs)\, R(s)\, S(x)\, dsdx$$

mais :

$$S_1(x) = \int S(x)\, G(xs)\, ds = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_n}{\lambda_n} \psi_n(x)$$

et par conséquent :

$$\int G(xs)\,R(s)\,S(x)\,ds\,dx = \int R(s)\,S_1(s)\,ds \equiv 0$$

d'après la formation même de $R(x)$.

D'autre part :

$$\int G(xs)\,R(s)f(x)\,ds\,dx = \int G(xs)\,R(s)\,N(xt)\,h(t)\,ds\,dx\,dt$$

$$= \int H(st)\,R(s)\,h(t)\,ds\,dt = 0$$

car :

$$\int H(xs)\,R(s)\,ds \equiv 0.$$

Il résulte donc :

$$\int G(xs)\,R(x)\,R(s)\,dx\,ds = 0.$$

d'où

$$R(x) \equiv 0.$$

18. Noyau symétrisable fermé. — *Nous dirons qu'un noyau symétrisable est fermé, si le noyau symétrique* $H(xy)$ *est lui-même fermé.*

Un noyau symétrisable fermé *a une infinité de valeurs caractéristiques.* En effet, la relation

$$\int H(xs)\,h(s)\,ds = 0$$

et les relations

$$\int \varphi_n(s)\,h(s)\,ds = 0$$

sont réciproques. Par conséquent si $H(xy)$ est fermé, il n'existe aucune fonction de (x) qui vérifie les relations précédentes, ce qui montre que les fonctions $\varphi_n(x)$ sont en nombre infini.

V. — NOYAUX DIVERS.

19. Noyaux divers L(α). — Parmi les noyaux continus, il convient de signaler la classe importante des noyaux L(α) qui vérifient par rapport à l'un de leurs arguments la condition de Lipschitz, sous sa forme la plus générale

$$|N(xy) - N(xz)| < A\,|y - z|^{\alpha}.$$

Ces noyaux jouissent de la propriété suivante.

La fonction D(λ) *d'un noyau* L(α) *est de genre zéro*, plus précisément, *son ordre est au plus égal à* $\frac{2}{2\alpha + 1}$ [1].

Pour démontrer ce théorème, nous établirons d'abord l'inégalité [2]

$$\left| N\begin{pmatrix} x_1 x_2 \dots x_p \\ x_1 x_2 \dots x_p \end{pmatrix} \right| < M^p \frac{p^{\frac{p}{2}}}{p^{\alpha p - 1}}$$

où M désigne un nombre fini, indépendant de p.

On a :

$$N\begin{pmatrix} x_1 x_2 \dots x_p \\ x_1 x_2 \dots x_p \end{pmatrix} = \tag{8}$$

$$\begin{vmatrix} N(x_1x_1)-N(x_1x_2) & N(x_1x_2)-N(x_2x_3) \dots N(x_1x_{p-1})-N(x_1x_p) & N(x_1x_p) \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \\ N(x_px_1)-N(x_px_2) & N(x_px_2)-N(x_px_3) \dots N(x_px_{p-1})-N(x_px_p) & N(x_px_p) \end{vmatrix}$$

comme il résulte de l'expression connue en retranchant des termes de chaque colonne, ceux de la colonne suivante, pour les p — 1 premières colonnes. Si nous posons :

$$N(x_i y) - N(x_i z) = (y - z)^{\alpha} N_k(yz) \qquad (|N_k(yz)| < A)$$

---

[1] T. Lalesco, *CR.* 145, pag. 906, 1907.
[2] J. Fredholm, *Acta mathematica*, Bd. 27.

on aura :

$$N\begin{pmatrix} x_1 x_2 \dots x_p \\ x_1 x_2 \dots x_p \end{pmatrix} = (x_1 - x_2)^\alpha (x_2 - x_3)^\alpha \dots (x_{p-1} - x_p)^\alpha$$

$$\begin{vmatrix} N_1(x_1 x_2) N_1(x_2 x_3) \dots N_1(x_{p-1} x_p) N(x_1 x_p) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ N_p(x_1 x_2) N_p(x_2 x_3) \dots N_p(x_{p-1} x_p) N(x_p x_p) \end{vmatrix}.$$

Or le dernier déterminant a tous ses termes finis et plus petits que A'. Son module maxinrum, sera donc, d'après le théorème d'Hadamard :

$$p^{\frac{p}{2}} A^p.$$

Considérons maintenant le produit

$$(x_1 - x_2)(x_2 - x_3) \dots (x_{p-1} - x_p)$$

dans le domaine

(9) $$1 \geqslant x_1 \geqslant x_2 \geqslant \dots \geqslant x_p \geqslant 0.$$

La somme de ses facteurs est $x_1 - x_p$; par conséquent, pour x_1 et x_p constants, on obtiendra le maximum du produit lorsque tous les facteurs seront égaux.

Le maximum absolu aura donc lieu lorsque $x_1 - x_p$ est maximum, c'est-à-dire, lorsque $x_1 = 1$ et $x_p = 0$.

Dans ce cas, chaque facteur est égal à $\frac{1}{(p-1)}$ et la valeur du maximum sera

$$\frac{1}{(p-1)^{p-1}}.$$

D'autre part, le déterminant (8) est une fonction symétrique des variables $x_1 x_2 \dots x_p$; toute valeur de ce déterminant sera donc comprise parmi celles relatives au domaine (9), puisque on pourra toujours opérer un changement entre les variables qui les arrangent suivant leur ordre de grandeur. On aura donc bien

$$\left| N\begin{pmatrix} x_1 x_2 \dots x_p \\ x_1 x_2 \dots x_p \end{pmatrix} \right| < \frac{p^{\frac{p}{2}} A^p}{(p-1)^{\alpha(p-1)}}$$

et puisque :

$$\lim_{p=\infty} \left(\frac{p}{p-1}\right)^{(p-1)\alpha} = e^\alpha$$

on pourra prendre pour limite supérieure :

$$\frac{p^{\frac{p}{2}}M^p}{p^{\alpha(p-1)}}.$$

Soit mantenant u_p le cœfficient de λ^p en $D(\lambda)$; on aura :

$$\sqrt[p]{|u_p|} < \frac{p^{\frac{1}{2}}}{p^{\alpha\left(\frac{p-1}{p}\right)}} \frac{M}{\sqrt[p]{p!}}$$

ou, en utilisant la formule de Stirling approchée

$$p! \sim \left(\frac{p}{e}\right)^p$$

nous aurons

$$\sqrt[p]{|u_p|} < \frac{Me}{p^{\alpha\left(\frac{p-1}{p}\right)+\frac{1}{2}}}$$

et par conséquent :

$$p^{\alpha+\frac{1}{2}}\sqrt[p]{|u_p|} < M'$$

pour p suffisamment grand, ce qui montre bien que l'ordre de $D(\lambda)$ est au plus égal à $\frac{2}{2\alpha+1}$; *le genre est par conséquent nul.*

Remarques. — 1° D'après les propriétés bien connues des fonctions entières, *l'exposant de convergence* de la série des $1 : \lambda_n$ sera aussi au plus égal à $\frac{2}{2\alpha+1}$; on peut donc affirmer que l'on aura ;

$$\lim_{n=\infty} n^{\frac{2\alpha+1}{2}-\varepsilon} : \lambda_n = 0$$

ε étant une quantité positive aussi petite que l'on veut,

2° Si le noyau *est continu et vérifie la condition de Lipschitz* ($\alpha = 1$), l'ordre de $D(\lambda)$ sera, d'après ce qui précède, égal

à $\frac{2}{3}$; on aura donc :

$$\lim_{n=\infty} n^{\frac{3}{2}-\varepsilon} : \lambda_n = 0 \text{ [1]}.$$

---

(1) Tout récemment, M. H. Weyl a établi que, pour un noyau symétrique, *admettant une dérivée qui en outre est continue*, on peut supprimer ε. (V. Gött. Nachrichten, 1991, pag. 110).

CHAPITRE IV.

L'ÉQUATION DE FREDHOLM DE PREMIÈRE ESPÈCE.

1. — L'équation de Fredholm de première espèce présente des difficultés d'étude, essentiellement différentes de celles qu'on a rencontrées jusqu'ici dans la théorie de l'équation régulière de Fredholm.

Pour se poser un problème d'existence, c'est-à-dire pour avoir des cas généraux où la solution du problème soit unique, il ne suffit plus de limiter le domaine des solutions, à celui des fonctions réelles et intégrables; *des conditions accessoires sont indispensables*. Cette diminution du domaine où l'on devra chercher les solutions, constitue l'élément nouveau et le plus important du problème.

Or, l'étude directe des séries trigonométriques avait déjà signalé le rôle des fonctions réelles à carré intégrable et les recherches modernes semblent montrer l'importance de cette classe de fonctions dont le concept paraît devoir suivre celui de la classe des fonctions intégrables. La particularité la plus intéressante de toutes ces recherches, est que l'instrument nécessaire et commode d'investigation, se trouve être l'intégrale au sens de M. Lebesgue, et non plus l'intégrale Riemannienne, ce qui nous donne un nouvel exemple tout-à-fait remarquable d'une recherche logique, suivie des résultats immédiatement utilisables.

Dans ce chapitre donc, les intégrales seront prises au sens de M. Lebesgue; nous emploierons encore le mot sommable

pour désigner une fonction intégrable au sens de M. Lebesgue, et nous désignerons par Π l'ensemble des fonctions réelles, à carré sommable dans l'intervalle (a, b).

M. E. Picard a fait connaître un théorème important sur l'équation de première espèce. Pour l'établir, nous avons d'abord besoin de quelques résultats récents sur la convergence des fonctions de variables réelles.

2. Convergence moyenne ; définitions. — *a) Une suite de fonctions Ω*

$$(1) \qquad f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$$

converge en moyenne dans l'intervalle (a, b) si l'on a :

$$\lim_{n,\, m = \infty} \int_a^b [f_n(x) - f_m(x)]^2 dx = 0.$$

b) La suite (1) *converge en moyenne vers une fonction limite $f(x)$, si l'on a*

$$\lim_{m = \infty} \int_a^b [f(x) - f_m(x)]^2 dx = 0.$$

Deux fonctions limites $f(x)$ et $\varphi(x)$, égales dans tout l'intervalle (a, b) *sauf sur un ensemble de mesure nulle*, sont considérées comme égales. On a évidemment :

$$\int_a^b [f(x) - \varphi(x)]^2 dx = 0$$

et réciproquement.

c) Une suite (1) *converge presque uniformément* [1] *dans l'intervalle (ab)*, s'il existe des intervalles intérieurs à ab, de mesure $b - a - \varepsilon$ (ε arbitrairement petit), où la suite converge uniformément.

---

[1] *Wesentlich gleichmaessig* (H. Weyl), ou *uniformément en général* (Plancherel, Lauricella).

3. Lemme [1]. — *Une suite de fonctions Ω convergente en moyenne, admet une fonction limite et une seule.*

Nous montrons d'abord qu'on peut extraire de (1), une suite presque uniformément convergente dans l'intervalle (ab). Considérons pour cela l'ensemble des fonctions (1) qui vérifient l'inégalité :

$$\mathrm{I}_{mn}=\int[f_m(x)-f_n(x)]^2\,dx<\rho.$$

Pour ces fonctions, l'ensemble des points x, où l'on a :

$$|f_m(x)-f_n(x)|>\eta$$

aura une mesure $\mu<\frac{\rho}{\eta^2}$; en effet, nous avons :

$$\mu\eta^2<\mathrm{I}_{mn}<\rho.$$

Si nous voulons donc que $\mu<\eta$, il suffira de choisir $\rho=\eta^3$. Il résulte de là, *qu'à chaque nombre η on peut trouver une infinité de fonctions* (1) *telles que la mesure de l'ensemble où leur écart est supérieur à η, soit inférieure à η.*

Prenons maintenant une suite convergente quelconque de nombres positifs décroissants : $\sum_{p=1}^{\infty}\eta_p$. Appellons $f_1^*(x)$ la fonction d'indice le moins élevé, qui vérifie la condition précédente pour η_1 ; soit de même $f_2^*(x)$ la fonction analogue pour η_2, assujettie encore à la seule condition d'avoir un indice supérieur à celui de $f_1^*(x)$, et ainsi de suite. La suite :

(2) $$f_1^*(x),\quad f_2^*(x)\ldots,\quad f_n^*(x)\ldots$$

répond à la question. Il suffira pour cela de montrer que, pour un ε donné, arbitrairement petit, il existe un intervalle de

---

[1] Voir à ce sujet : H. Weyl, *Convergenz von Reihen die nachorthogonal functionen fortschreiten*, Math. Ann., (p. 225-245). Bd. 67, 1909.
M. Plancherel (Rendiconti del Palermo, 1910, p. 292).
F. Riesz (C. R., t. 150, 1910, p. 1304).
Voir aussi : Egoroff (C. R., t. 152, 30 janvier 1911).

mesure $b - a - \varepsilon$, où l'on aura, à partir d'une certaine valeur de n :

$$|f_p^*(x) - f_q^*(x)| < \eta \qquad (p, q > n)$$

aussi petit que soit η. Déterminons pour cela η de façon qu'on ait à la fois $\eta_n < \eta$ et $r_n = \sum_{p=n}^{\infty} \eta_p < \varepsilon$ ce qui est toujours évidemment possible, car η_n et r_n tendent vers zéro avec $\frac{1}{n}$. Dans ces conditions, excluons de l'intervalle (ab) tous les ensembles où les écarts des fonctions (2) sont respectivement plus grands que $\eta_n, \eta_{n+1}, \ldots$; la mesure de la somme de ces ensembles enlevés est plus petite ou égale à :

$$\eta_n + \eta_{n+1} + \ldots < \varepsilon.$$

L'intervalle qui reste, dont la mesure I_ε est plus grande que $b - a - \varepsilon$, est l'intervalle cherché. En effet, on ne peut pas avoir dans cet intervalle :

$$|f^*_{m+h}(x) - f^*_m(x)| > \eta$$

car on aura alors :

$$|f^*_{m+h}(x) - f^*_m(x)| > \eta > \eta_m$$

ce qui est impossible, puisque nous avons exclu l'intervalle où cette inégalité a lieu. La propriété est ainsi établie.

La suite (2) tend donc uniformément en I_ε vers une fonction $f(x)$. Cette fonction, définie ainsi dans tout l'intervalle, sauf peut-être sur un ensemble de mesure nulle, *est une fonction limite de* (1).

D'abord elle appartient à Ω, car on aura [1] :

$$\int_{I(\varepsilon)} [f_n^*(x)]^2 dx < 2 \int_{I(\varepsilon)} [f_n^*(x) - f_m^*(x)]^2 dx + 2 \int_{I(\varepsilon)} [f_m(x)]^2 dx < 2\eta + 2M.$$

---

[1] Si :

$$|a| < |b| + |c|,$$

on a bien :

$$|a|^2 < 2|b|^2 + 2|c|^2.$$

Donc $\lim\limits_{n=\infty} \int_{I(\varepsilon)} [f_n^*(x)]^2 dx$ existe ; elle sera d'ailleurs égale à $\int_{I(\varepsilon)} f^2(s)\,ds$, puisque les fonctions $f_n^*(x)$ tendent uniformément vers $f(x)$ dans l'intervalle I_ε, et l'on aura :

$$\int_{I(\varepsilon)} f^2(s)\,ds \leq 2\eta + 2M$$

quelque soit ε. Donc $\lim\limits_{\varepsilon=0} \int_{I(\varepsilon)} f^2(s)\,ds$ existe ; ce sera justement d'après la définition de $f(x)$:

$$\int_a^b f^2(s)\,ds.$$

La fonction $f(x)$ appartient donc bien à Ω. On a ensuite :

$$\int_a^b [f(s) - f_p(s)]^2 ds < 2 \int_a^b [f(s) - f_m^*(s)]^2 ds$$

$$+ 2 \int_a^b [f_m^*(s) - f_p(s)]^2 ds < 2 [\eta^2 I_\varepsilon + M\varepsilon] + 2\eta^2$$

ce qui nous montre bien que $f(x)$ est une fonction-limite pour *toute* la suite (1). Enfin, cette fonction-limite est la seule ; supposons en effet que l'on ait :

$$\lim_{n=\infty} \int_a^b [f(s) - f_n(s)]^2 ds = \lim_{m=\infty} \int_a^b [\varphi(s) - f_m(s)]^2 ds = 0$$

on aura, pour une infinité de valeurs p,

$$\int_a^b [f(s) - \varphi(s)]^2 ds \leq 2 \int_a^b [f(s) - f_p(s)]^2 ds$$

$$+ 2 \int_a^b [\varphi(s) - f_p(s)]^2 ds < \varepsilon',$$

ce qui montre que l'on a, rigoureusement

$$\int_a^b [f(s) - \varphi(s)]^2 ds = 0$$

c'est-à-dire les fonctions $f(x)$ et $\varphi(x)$ ne peuvent être différentes, que sur un ensemble de mesure nulle.

4. Théorème de MM. Fischer-Riesz. — Soient

$$(3) \qquad \varphi_1(x), \quad \varphi_2(x), \ldots \quad \varphi_n(x), \ldots$$

une suite complète de fonctions orthogonales, et

$$f_1, \quad f_2, \ldots \quad f_n, \ldots$$

des constantes telles que la série

$$(4) \qquad f_1^2 + f_2^2 + \ldots + f_n^2 \ldots$$

soit convergente.

Il existe une fonction $f(x)$ à carré sommable et une seule qui admet les constantes f_n comme coefficients de Fourier, par rapport à la suite (3).

La condition (4) *est nécessaire et suffisante.*

Ce théorème important a été démontré à la fois par MM. E. Fischer (¹) et F. Riesz (²).

Il a l'avantage de contenir actuellement sous une forme immédiatement utilisable en Analyse, une partie essentielle des recherches récentes sur les équations linéaires à une infinité de variables.

La démonstration est immédiate, à l'aide du lemme précédent. Considérons la suite

$$f_n(x) = f_1\varphi_1(x) + f_2\varphi_2(x) + \ldots + f_n\varphi_n(x) \quad (n = 1, 2, \ldots \infty).$$

On a

$$\int_a^b [f_n(s) - f_m(s)]^2 ds = f_n^2 + \ldots + f^2_{n+1} + f^2_{m+1}$$

et par conséquent

$$\lim_{m,\, n=\infty} \int_a^b [f_n(s) - f_m(s)]^2 ds = 0.$$

La suite $f_n(x)$ *converge donc en moyenne* dans l'intervalle (ab); elle définit ainsi une fonction $f(x)$ parfaitement déterminée,

---

(¹) E. Fischer, *Sur la convergence en moyenne.* (C. R. 144 I, p. 1022-1024, 1907).

(²) F. Riesz, *Göttinger Nachrichten*, 1907, et *Sur les systèmes orthogonaux de fonctions* (C. R. 144 I, p. 615-619, 1907).

sauf sur un ensemble de mesure nulle ; *c'est la fonction cherchée.* Il faut pour cela, démontrer que l'on a :

$$f_p = \int f(s)\varphi_p(s)\,ds.$$

Or on a :

$$\left[\int_a^b f(s)-f_n(s)\ \varphi_p(s)ds\right]^2 \leq \int_a^b f(s)-f_n(s)\ ^2ds \int_a^b \varphi^2{}_p(s)ds < \varepsilon$$

et par conséquent

$$\lim_{n=\infty} \int_a^b f_n(s)\varphi_p(s)\,ds = \int_a^b f(s)\varphi_p(s)\,ds.$$

Mais

$$\int f_n(s)\varphi_p(s)\,ds = f_p \qquad n > p.$$

c. q. f. d.

Il existe donc une fonction qui admet les constantes f_n, comme constantes de Fourier, par rapport à la suite (3). C'est aussi la seule, dans notre hypothèse. En effet, s'il y avait une seconde fonction $\psi(x)$, la différence $\varphi(x) - \psi(x)$ serait orthogonale à toutes fonctions $\varphi_n(x)$, ce qui est impossible puisque la suite (3) est fermée.

5. Théorème de M. Schmidt sur les noyaux non-symétriques. — M. E. Schmidt a fait connaître dans son *Inaugural Dissertation*, une extension de son théorème, pour le cas d'un noyau non symétrique.

Soit $N(xy)$ un noyau non symétrique appartenant à Ω, et posons

$$\overline{N}(xy) = \int N(sx)\,N(sy)\,ds$$

et

$$\underline{N}(xy) = \int N(xs)\,N(ys)\,ds.$$

Ces deux noyaux sont évidemment symétriques : *ils sont aussi positifs*. En effet, on a

$$\int \bar{N}(xy)\, h(x)\, h(y)\, dx dy = \left[\int N(sx)\, h(x)\, dx\right]^2$$

et de même pour l'autre noyau $\underline{N}(xy)$.

Les valeurs caractéristiques des noyaux $\bar{N}(xy)$ et $\underline{N}(xy)$ sont donc positives (n° **9**). *Elles sont aussi les mêmes ;* en effet, soit λ_n^2 une valeur caractéristique de $\bar{N}(xy)$ et $\varphi_n(x)$ une solution relative. On a

$$(5) \qquad \varphi_n(x) - \lambda_n^2 \int \bar{N}(xt)\, \varphi_n(t)\, dt = 0.$$

Posons alors

$$(6) \qquad \psi_n(x) = \lambda_n \int N(xt)\, \varphi_n(t)\, dt.$$

on aura

$$(7) \qquad \varphi_n(x) - \lambda_n \int N(sx)\, \psi_n(s)\, ds = 0,$$

ce qui nous montre d'abord que $\psi_n(x)$ ne peut pas être identiquement nul. Remplaçons ensuite dans la relation (6), $\varphi_n(x)$ par sa valeur (7) ; on aura

$$(8) \qquad \psi_n(x) - \lambda_n^2 \int \underline{N}(xs)\, \psi_n(s)\, ds = 0.$$

Le noyau $\underline{N}(xy)$ admet donc aussi la valeur caractéristique λ_n^2 ; d'autre part on déduit de (6)

$$\int \psi_n^2(s)\, ds = \lambda_n \int N(st)\, \varphi_n(t)\, \psi_n(s)\, ds\, dt$$

et de même, de (7)

$$\int \varphi_n^2(s)\, ds = \lambda_n \int N(st)\, \varphi_n(t)\, \psi_n(s)\, ds\, dt$$

et par conséquent

$$\int \psi_n^2(s)\, ds = \int \varphi_n^2(s)\, ds = 1.$$

Donc $\psi_n(x)$ est une fonction fondamentale, relative à λ_n^2, de $\underline{N}(xy)$. Nous obtenons ainsi le résultat suivant :

a) Les noyaux symétriques $\overline{N}(xy)$ *et* $\underline{N}(xy)$ *ont les mêmes valeurs caractéristiques, toutes positives ;* nous les écrirons sous la forme λ_n^2 ;

b) Si les fonctions caractéristiques du noyau $\overline{N}(xy)$ *sont*

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots$$

celles du noyau $\underline{N}(xy)$ *seront*

$$\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots, \psi_n(x), \ldots$$

où l'on a :

$$\psi_n(x) = \lambda_n \int N(xs)\varphi_n(s)\,ds.$$

Voici maintenant le théorème de M. Schmidt :

Toute fonction continue ayant la forme a ou b :

$$(a) \quad \int N(xs)h(s)\,ds, \qquad (b) \quad \int N(sx)h(s)\,ds$$

est développable dans une série régulièrement convergente des fonctions $\psi_n(x)$ *ou* $\varphi_n(x)$, *suivant que la fonction a la forme* (*a*) *ou* (*b*).

Nous démontrons la première partie de ce théorème ; l'autre en est une simple répétition.

Le coefficient de Fourier de la fonction (*a*) par rapport à $\psi_n(x)$ est

$$\int N(xs)\psi_n(x)h(s)\,ds\,dx = \frac{1}{\lambda_n}\int h(s)\varphi_n(s)\,ds$$

de sorte que le développement cherché serait

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_n(x)}{\lambda_n}\int h(s)\varphi_n(s)\,ds = \sum_{n=1}^{\infty} \int N(xs)\varphi_n(s)\,ds \int h(s)\varphi_n(s)\,ds.$$

Cette série est régulièrement convergente, comme il résulte d'un raisonnement appliqué au théorème de Hilbert-Schmidt.

Or, elle a les mêmes coefficients de Fourier que la fonction (a), d'après la définition même de $S(x)$; on aura donc :

$$\int N(xs)\,h(s)\,ds = S(x).$$

Ce théorème à son importance propre, parce qu'il donne des développements en série suivant les fonctions $\varphi_n(x)$ ou $\psi_n(x)$, pour une classe de fonctions plus étendue que celle fournie par le théorème de Hilbert-Schmidt, appliqué directement aux noyaux $\underline{N}(xy)$ ou $N(xy)$.

Théorème de M. E. Picard [1]. — *L'équation intégrale de première espèce*

$$\int N(xs)\,h(s)\,ds = f(x)$$

admet une solution et une seule dans Ω, si la série

$$(9)\qquad \lambda_1^2 f_1^2 + \lambda_2^2 f_2^2 + \ldots + \lambda_n^2 f_n^2 + \ldots$$

est convergente. Le noyau $N(xy)$ est supposé fermé. La condition (9) *est nécessaire et suffisante.*

Dans cet énoncé, les constantes λ_n^2 désignent les valeurs caractéristiques de $\underline{N}(xy)$ et f_n les coefficients de Fourier de $f(x)$ par rapport aux fonctions orthogonales de $\underline{N}(xy)$ [2].

Pour démontrer ce théorème, calculons le coefficient f_n par rapport à $\psi_n(x)$; on a

$$f_n = \int f(x)\psi_n(x)\,dx = \iint \psi_n(x) N(xs)\,h(s)\,ds\,dx = \frac{1}{\lambda_n}\int h(s)\varphi_n(s)\,ds$$

---

[1] E, Picard, *Un théorème général sur les équations intégrales de première espèce*. (C. R., 14 juin et 28 juin 1909) et *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, (1910, t. 29).

[2] Dans le cas du noyau symétrique, on a

$$\underline{N}(xy) = \overline{N}(xy) = N_1(xy).$$

Or, le noyau itéré a comme valeurs caractéristiques, les carrés de celles de $N(xy)$; dans ce cas donc, λ_n désigne la valeur caractéristique générale de $N(xy)$, au signe près. De même, les fonctions caractéristiques de $N(xy)$ et $N_1(xy)$ étant identiques, on peut dire aussi que les coefficients f_n sont pris par rapport aux fonctions orthogonales de $N(xy)$.

d'où

$$(10) \qquad \int h(s)\,\varphi_n(s)\,ds = \lambda_n f_n.$$

Or, d'après le théorème de Fischer-Riesz, la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une solution et une seule $h(x)$, qui vérifie les égalités (10), est que la série $\sum \lambda_n^2 f_n^2$ soit convergente.

La fonction ainsi trouvée, vérifie bien l'équation intégrale. En effet, d'après la formation même de $h(x)$, les fonctions $\int N(xs)\,ds$ et $f(x)$ ont les mêmes coefficients de Fourier par rapport à la suite fermée $\psi_n(x)$: elles sont donc identiques.

Remarque. — *Si la suite des fonctions $\psi_n(x)$ n'est pas fermée*, le raisonnement précédent nous permet seulement d'écrire

$$(11) \qquad \int N(xs)\,h(s)\,ds = f(x) + K(x),$$

$K(x)$ étant orthogonale aux $\psi_n(x)$. Toute autre équation de la forme

$$(12) \qquad \int N(xs)\,h_1(s)\,ds = f(x) + K(x) + K_1(x)$$

où $K_1(x)$ désigne une autre fonction orthogonale aux $\psi_n(x)$ n'est plus résoluble en Ω. En effet, on déduit de (11) et (12)

$$\int N(xs)\,[h(s) - h_1(s)]\,ds = K_1(x)$$

ce qui est impossible.

Donc, *si le noyau $N(xy)$ n'est pas fermé, parmi les équations*

$$\int N(xs)\,h(s)\,ds = f(x) + K(x)$$

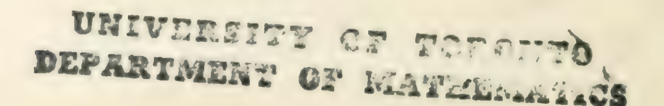
où $f(x)$ désigne une fonction déterminée, non orthogonale aux $\psi_n(x)$ et $K(x)$ une fonction quelconque orthogonale aux $\psi_n(x)$, *il existe une équation et une seule qui est résoluble en Ω* (1).

---

(1) Voir à ce sujet aussi :

G. Lauricella, *Sopra alcuni equazione integrali* (Atti d. Acc. dei Lincei. 1908), et *Sull' equazione integrali di 1a specie* (Ibid 1909).

G. Lauricella, *Sulla risoluzione dell' equazione integrali di 1a specie.* (Atti d. r. Acc. dei Lincei, avril 1911, p. 528),



TROISIÈME PARTIE.

LES ÉQUATIONS SINGULIÈRES.

1. Définitions ; historique. — Nous dirons qu'une équation intégrale est *singulière* si l'une au moins des limites de l'intégrale définie qui s'y trouve, est infinie, ou bien si le noyau devient infini pour un point, au moins, de l'intervalle d'intégration.

Nous ferons aussi entrer dans la classe des équations singulières, l'équation de Volterra de première espèce, dans le cas où l'on a $N(x,x) = 0$, pour un point, au moins, de l'intervalle d'intégration.

Pour l'équation singulière de Volterra, nous avons à citer les travaux de MM. V. Volterra, E. Holmgren, J. Horn (1), et G. C. Evans (2).

L'équation singulière de Fredholm a été aussi considérée, sous l'impulsion des travaux de M. D. Hilbert, par MM. H. Weyl (3), E. Hilb (4) et E. Plancherel (5).

Des circonstances analytiques remarquables et des plus diverses, vont se présenter dans ce genre d'études ; voici celles qui sont essentielles :

---

(1) J. Horn, *Volterrasche Integralgleichungen und Summengleichungen.* (Journal f. eine u. a. math. 140, 2, p. 120-158, 1911.

(2) G. C. Evans, *L'equazione integrali di Volterra di secondo specie, con un limite dell intégrali infinito.* (Atti Lincci, mars, mai, juillet 1911).

(3) H. Weyl, *Singuläre Integralgleichungen, mit besonderer Berücksichtigung des Fouriertheorems.* (Inaugural Diss. Göttingen 1908 et Math. Ann 1908.

(4) E. Hilb, *Über Integraldarstellungen willkürlicher Functionen.* (Math. Ann. Bd 67, 1909, p. 1-66).

(5) E. Plancherel, *Integraldarstellungen willkürlicher Functionen.* (p. 519) Math. Ann. Bd. 67, 1909.

1° Les valeurs caractéristiques ne forment plus, en général, un ensemble dénombrable de points *isolés*; elles peuvent être distribués, dans le cas symétrique par exemple, sur des segments de l'axe réel, partout denses. On dit qu'elles fournissent dans ce cas, le *spectre segmentaire* du noyau.

2° Au lieu du théorème de développement en *séries* de Fourier, s'introduit un théorème sur la représentation d'une fonction arbitraire, à l'aide d'une *intégrale* de Fourier.

3° La nature analytique en λ_1 de la solution dépend essentiellement du second membre.

4° La réalité des solutions impose et fait ressortir, dans le cas singulier, des conditions restrictives des plus variées.

Les méthodes actuelles se maintiennent essentiellement dans le domaine réel. Il paraît pourtant nécessaire, dès que l'on passe au cas singulier, d'introduire la variable complexe. C'est ce que l'on a déjà fait pour l'équation de Volterra, et c'est ce que l'on peut aussi essayer pour l'équation de Fredholm. Dans quelques notes récentes, M. E. Picard indique une voie fructueuse dans cette nouvelle direction.

Ce chapitre est en pleine voie de formation et des résultats ayant un caractère plus grand de généralité ne sont pas encore obtenus d'une manière tout à fait nette. Aussi, nous nous bornerons, pour l'équation de Fredholm, à développer quelques exemples et les théorèmes de M. Picard.

A côté des équations singulières proprement dites, se place la classe importante des équations dont le noyau est de la forme

$$\frac{N(xy)}{(x-y)^{\alpha}} \qquad (0 < \alpha < 1).$$

Ces équations, à l'aide d'un artifice de calcul, peuvent être traitées avec succès par les méthodes précédentes et ont des propriétés régulières.

I. — L'ÉQUATION SINGULIÈRE DE VOLTERRA.

Le cas de $N(0, 0) = 0$.

2. Théorèmes de MM. Volterra et Holmgren. — Ce cas a été approfondi par MM. V. Volterra et E. Holmgren, dans l'hypothèse d'un noyau analytique, ou plus généralement, d'un noyau qui peut être mis sous la forme

$$(1)\quad N(xy) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} y + \dots + A_n y^n + x^{n+1} Q(xy)$$
$$= P(xy) + x^{n+1} Q(xy). \quad (A_0 + A_1 + \dots + A_n \neq 0).$$

$Q(xy)$ désigne une fonction finie dans l'intervalle d'intégration. Voici l'énoncé du théorème de M. Volterra, complété par M. E. Holmgren :

Pour que l'équation

$$(2)\qquad \int_0^x N(xs)\,\varphi(s)\,ds = f(x)$$

ait des solutions réelles, finies autour de l'origine, il faut et il suffit que :

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = \dots = f^{(n)}(0) = 0.$$

Dans ce cas, l'équation (2) *a* $k+1$ *solutions linéairement indépendantes,* k *étant le nombre des racines à partie réelle positive ou nulle, de l'équation en* r :

$$(2')\qquad \frac{A_0}{r+n} + \frac{A_1}{r+n-1} + \dots + \frac{A_n}{r+1} = 0.$$

Pour démontrer ce théorème, nous emploierons toujours la méthode des approximations successives, en réduisant ce cas, à la résolution d'une équation différentielle linéaire d'ordre n et à un mécanisme d'approximations successives. Nous écrirons d'abord le noyau sous la forme

$$(1')\qquad a_0(x) + a_1(x)\frac{(x-y)}{1} + \dots$$
$$+ a_n(x)\frac{(x-y)^n}{n!} + \frac{(x-y)^{n+1}}{(n+1)!} P(xy)$$

en mettant en évidence l'inconnue $x - y$, à la place de y. Puisque l'ensemble des termes de degré minimum, forme un polynôme homogène de degré n, il résulte que $a_0(x)$ contient nécessairement x^n en facteur, et en général, $a_p(x)$ contient au moins x^{n-p} en facteur. On a de plus

$$a_0(0) = A_0 + A_1 + \ldots + A_n \neq 0$$

comme on le voit, en faisant $x = y$, dans les deux expressions (1) et (1') de $N(x, y)$.

Dans ces conditions, l'équation de Volterra peut s'écrire :

$$\int_0^x \left[a_0(x) + a_1(x) \frac{(x-s)}{1} + \ldots + a_n(x) \frac{(x-s)^n}{1} \right] \varphi(s)\, ds + \int_0^x \frac{(x-s)^{n+1}}{(n+1)!} P(x,s) \varphi(s)\, ds = f(x).$$

Il suffit maintenant d'appliquer la formule bien connue

$$\int_0^x \frac{(x-s)^p}{p!} \varphi(s)\, ds = \int_0^x \varphi(s)\, ds^{p+1}$$

et de prendre comme inconnue, à la place de $\varphi(x)$, la fonction

$$z(x) = \int_0^x \varphi(s)\, ds^{n+1}$$

pour obtenir l'équation

$$(3) \qquad a_0(x) \frac{d^n z}{dx_n} + a_1(x) \frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}} + \ldots + a_n(x) z + \int_0^x P_1(x,s) z(s)\, ds = f(x).$$

Si la solution $\varphi(x)$ est finie et continue à l'origine, l'ensemble des termes de degré minimum dans le premier membre de (3) sera de degré $n+1$ en x ; il résulte donc qu'il est nécessaire que l'on ait aussi :

$$f(x) = x^{n+1} f_1(x).$$

Dans ces conditions, nous appliquons la méthode des approximations successives, en prenant comme première équation

$$(4) \quad D(z_1) = a_0(x) \frac{d^n z_1}{dx^n} + a_1(x) \frac{d^{n-1} z_1}{dx^{n-1}} + \ldots + a_n(x) z_1 = f(x).$$

C'est une équation différentielle linéaire d'ordre n, du type de Fuchs, dont la solution générale sera donnée par l'expression

$$(5) \qquad C_1 x^{r_1} P_1(x) + C_2 x^{r_2} P_2(x) + \ldots$$
$$+ C_n x^{r_n} P_n(x) + Q(x) \qquad (P_i(0) \neq 0)$$

où r_1, r_2, ... r_n sont les racines, supposées d'abord distinctes, et à différences non entières, de l'équation déterminante. $Q_1(x)$ désigne une solution particulière de l'équation (4), avec second membre ; elle peut toujours se mettre sous la forme[1] :

$$(5') \quad Q(x) = x^{r_1} P_1(x) \int_{a_1}^{x} \frac{Q_1(x) f(x) dx}{x^{r_1+1}} + x^{r_2} P_2(x) \int_{a_2}^{x} \frac{Q_2(x) f(x) dx}{x^{r_2+1}} + \ldots$$
$$+ x^{r_n} P_n(x) \int_{a_n}^{x} \frac{Q_n(x) f(x) dx}{x^{r_n+1}} \qquad (Q_i(0) \neq 0).$$

Un petit raisonnement nous montre immédiatement que cette solution est toujours finie et *de la forme $x^{n+1} q(x)$, si les intégrales qui figurent dans son expression, ont un sens.* En effet, l'ordre infinitésimal en x de l'expression sous le signe $\int$ qui figure dans le terme général, est au moins[2] $R(n + 1 - r_i - 1) = R(n - r_i)$. Si donc $R(n - r_i) > -1$, pour que l'intégrale correspondante ait un sens, il faudra prendre $a_i = 0$; dans ce cas, l'ordre infinitésimal de l'intégrale sera au moins égal à $R(n - r_i + 1)$, et par conséquent le terme tout entier, aura bien un ordre au moins égal à $n + 1$. Si $R(n - r_i) < -1$, on doit prendre comme limite inférieure $a_i > 0$, autrement arbitraire.

L'ordre infinitésimal sera alors égal au moins à r_i ; mais, comme dans ce cas on a $R(r_i) \geq n + 1$, l'ordre infinitésimal du terme respectif sera donc toujours au moins égal à $n + 1$.

Dans tous les cas, l'expression (3) nous fournit donc une solution de l'équation (4), finie et d'ordre infinitésimal au moins égal à $n + 1$. Si on laisse les constantes $a_i \neq 0$, arbitraires,

---

[1] On obtient cette formule en employant, par exemple, la méthode de la variation des constantes.

[2] $R(x)$ désigne la partie réelle de x.

l'expression (5′) représente la solution de (4) la plus générale, qui soit finie et d'ordre infinitésimal en x, au moins égal à $n+1$. Elle contient des constantes arbitraires, en nombre égal aux racines de l'équation algébrique (2′), telles que $R(r_i) \geqslant n+1$.

Il est maintenant très facile de démontrer la convergence régulière des approximations successives. En effet, dans l'intervalle d'intégration, on a

$$|f(x)| < Mx^{n+1}, \qquad |P_i(x)| < P_i, \qquad |Q_i(x)| < Q_i.$$

Si donc nous posons $\sum_1^n P_i Q_i = N$ et si ρ désigne la plus petite des expressions $|n - r_i + 1|$, on aura :

$$x^{r_i} P_i(x) \int_{a_i}^{x} \frac{Q_i(x) f(x)\, dx}{x^{r_i+1}} < P_i Q_i M \frac{x^{n+1}}{|n - r_i + 1|}$$

et par conséquent

$$|z_1(x)| < \frac{NM}{\rho} x^{n+1}.$$

La seconde approximation est donnée par

$$(6) \qquad D(z_2) = -\int_0^x P_1(xs) z_1(s)\, ds.$$

On prendra pour z_2 la même expression (5′), où l'on a à remplacer $f(x)$ par le second membre de (6). En vertu de l'inégalité

$$\left| \int_0^x P_1(xs) z_1(s)\, ds \right| < \pi \frac{MNx^{n+2}}{\rho(n+2)} \qquad (|P_1(xy)| < \pi)$$

nous pourrons écrire immédiatement

$$|z_2| < \pi \frac{M^2N^2}{\rho(\rho+1)} \frac{x^{n+2}}{n+2}.$$

On aura de même

$$|z_3| < \pi^2 \frac{M^3N^3}{\rho(\rho+1)(\rho+2)} \cdot \frac{x^{n+3}}{(n+2)(n+3)}$$

. . . .

$$|z_q| < \pi^{q-1} \frac{M^qN^q}{\rho(\rho+1)\dots(\rho+q-1)} \cdot \frac{x^{n+q}}{(n+2)\dots(n+q)}.$$

Ces inégalités démontrent la convergence régulière de la série des approximations.

La solution ainsi obtenue contient linéairement k *constantes arbitraires* a_i, k désignant le nombre de racines r_i dont la partie réelle est plus grande ou égale à $n + 1$, c'est-à-dire telles que $n - r_i \leqq -1$.

3. L'équation déterminante. — Il nous reste maintenant à montrer que l'équation déterminante de (4) coïncide nécessairement avec l'équation algébrique (2'). Remarquons pour cela, que l'équation déterminante de (4) ne change pas, si l'on ne garde des coefficients $a_i(x)$ que leurs premiers termes. Mais dans ce cas, l'équation (4) en $\varphi(x)$, se réduit évidemment à

$$\int_0^x (A_0 x^n + A_1 x^{n-1} s + \dots + A_n s^n)\varphi(s)\,ds = f(x)$$

dont l'équation déterminante s'obtient immédiatement, en y faisant $\varphi(x) = x^r$, ce qui nous donne :

$$\left[\frac{A_0}{r+1} + \dots + \frac{A^n}{r+n+1}\right] x^{n+r+1} = 0.$$

Maintenant, la relation

$$z(x) = \int_0^x \varphi(s)\,ds^{n+1}$$

nous montre que, si $\varphi(x) = x^r$, on aura $z(x) = \alpha x^{n+r+1}$; pour obtenir donc l'équation déterminante de (4), on n'aura qu'à remplacer r dans l'équation

$$\frac{A_0}{r+1} + \dots + \frac{A_n}{r+n+1} = 0$$

par $r - n - 1$. On pourra alors garder l'équation (2') à condition de remplacer la condition : $R(r_i) \geqslant n + 1$ par la condition $R(r_i) \geqslant 0$. On retombe ainsi sur la condition qui figure dans l'énoncé du théorème de MM. Volterra et Holmgren.

Remarques. — 1° Le cas des racines r_i égales, ou à différences entières, peut être traitée d'une façon absolument analogue ; l'introduction des logarithmes ne change rien au raisonnement précédent.

2° Le problème précédent revient à la recherche des solutions finies à l'origine, sur l'axe réel, de l'équation différentielle linéaire d'ordre infini

$$a_0(x)y + a_1(x)\int_0^x y\,dx + \dots + a_n(x)\int_0^x y\,dx^n + \dots = f(x).$$

Si le degré en s du noyau est fini, cette équation sera d'ordre fini et l'on retombe sur une question connue, dont le présent théorème est une véritable généralisation.

Les noyaux singuliers G.

4. Cas général. — Nous appelerons *noyau singulier G*, un noyau de la forme

$$\frac{G(xy)}{(x-y)^\alpha} \qquad (0 < \alpha < 1).$$

Si $G(xx) \neq 0$ nous dirons que le noyau est d'*exposant* α. Ces noyaux se rencontrent souvent dans les applications ; ils présentent aussi un intérêt historique, puisque le noyau rencontré dans le fameux problème d'Abel, est justement de cette forme.

Prenons l'équation de première espèce

$$(7) \qquad \int_0^x \frac{G(xs)}{(x-s)^\alpha}\varphi(s)\,ds = f(x).$$

Pour la résoudre, nous composons les deux membres de cette équation avec $\frac{1}{(x-y)^{1-\alpha}}$; nous obtenons

$$\int_0^x \frac{dz}{(x-z)^{1-\alpha}}\int_0^z \frac{G(zs)\varphi(s)\,ds}{(z-s)^\alpha} = \int_0^x \frac{f(z)\,dz}{(x-z)^{1-\alpha}}$$

ou appliquant la formule de Dirichlet

$$\int_0^x \varphi(s)\,ds \int_s^x \frac{G(zs)\,dz}{(x-z)^{1-\alpha}(z-s)^\alpha} = \int_0^x \frac{f(z)\,dz}{(x-z)^{1-\alpha}}$$

Posons

$$(7a)\qquad \int_y^x \frac{G(sy)\,ds}{(x-s)^{1-\alpha}(s-y)^{\alpha}} = K(xy)$$

et

$$\int_0^x \frac{f(z)\,dz}{(x-z)^{1-\alpha}} = F(x),$$

nous obtenons l'équation

$$(8)\qquad \int_0^x K(xs)\varphi(s)\,ds = F(x).$$

C'est une équation de Volterra, dont le noyau ne devient plus infini pour $x = y$. En effet, faisons en $(7a)$ le changement de variable

$$s - y = t(x - y)$$

nous obtenons immédiatement

$$K(xy) = \int_0^1 \frac{G[y + t(x-y), y]}{(1-t)^{1-\alpha}\,t^{\alpha}}\,dt$$

ce qui nous montre que le noyau $K(xy)$ est fini pour $x = y$.

L'artifice de calcul employé, nous oblige maintenant de montrer que, *réciproquement*, toute solution de (8) vérifie aussi (7). Cela revient à montrer que l'équation

$$\int_0^x \frac{h(s)\,ds}{(x-s)^{1-\alpha}} = 0$$

n'admet aucune autre solution que $h(x) \equiv 0$. Pour démontrer cette proposition, composons l'équation précédente avec $\frac{1}{(x-y)^{\alpha}}$ et appliquons la formule de Dirichlet ; on obtient immédiatement :

$$\frac{\pi}{\sin \alpha\pi}\int_0^x h(s)\,ds = 0$$

d'où il résulte $h(x) \equiv 0$.

5. Le problème d'Abel. — Abel avait considéré l'équation

$$\int_0^x \frac{\varphi(s)\,ds}{(x-s)^\alpha} = f(x) \qquad (0 < \alpha < 1).$$

C'est le cas particulier où $G(xy) = 1$.

Dans ce cas, les formules précédentes deviennent particulièrement simples. On a :

$$K(xy) = \frac{\pi}{\sin \alpha\pi}$$

$$F(x) = \int_0^x \frac{f(s)\,ds}{(x-s)^{1-\alpha}}.$$

Par conséquent, puisque $K'_y(xy) = 0$, la solution du problème d'Abel sera donnée simplement par la formule (1)

$$\varphi(x) = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} F'(x) = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \left[\frac{f(0)}{x^{1-\alpha}} + \int_0^x \frac{f'(s)\,ds}{(x-s)^{1-\alpha}} \right].$$

Le cas de $a = \infty$.

6. — L'équation de Volterra

$$(8) \qquad \varphi(x) + \int_x^\infty N(xs)\,\varphi(s)\,ds = f(x) \qquad (x > a).$$

se présente dans les recherches modernes sur les phénomènes non analytiques (2).

Pour traiter, avec M. G. C. Evans (3), un cas simple, nous ferons l'hypothèse que l'intégrale

$$(9) \qquad \int_x^\infty |N(xs)|\,ds$$

existe et que même, *pour x suffisamment grand*, elle peut être rendue aussi petite que l'on veut. Dans ce cas, en appliquant

(1) Voir aussi E. Goursat, *Sur un problème d'inversion d'Abel* (Acta Mat 27, 1903).

(2) Voir E. Picard, *La science moderne et son état actuel* (page 55).

(3) Voir *Atti Lincei*, mars et mai 1911.

les approximations successives, on démontre comme dans le cas de l'équation régulière de Fredholm, que la série des approximations converge, et qu'elle représente la seule solution finie de (e).

Nous avons dû prendre x suffisamment grand, par exemple plus grand que $b > a$. Pour obtenir maintenant une solution de (e) dans tout l'intervalle $(a \rightarrow +\infty)$ on peut procéder *par prolongement*. Ecrivons l'équation (e), sous la forme

$$(10) \qquad \varphi(x) + \int_x^b N(xs)\varphi(s)\,ds = f(x) - \int_b^\infty N(xs)\varphi(s)\,ds.$$

Le second membre de l'équation est connu, puisque $\varphi(x)$ est maintenant déterminé dans l'intervalle $(b, +\infty)$.

L'équation (10) est donc une équation de Volterra régulière, de seconde espèce qui nous donnera ainsi, les valeurs de $\varphi(x)$ dans l'intervalle (ab).

Dans l'hypotèse plus générale, seulement de l'*existence*, de l'intégrale (9), on peut introduire devant l'intégrale, un paramètre λ ; dans ce cas, les approximations successives convergent sûrement, *si λ est suffisamment petit*. Le point $\lambda = 0$ est donc un point régulier de la solution, en tant que fonction de λ. Il serait intéressant d'étudier complètement la nature analytique en λ, de la solution, puisque l'équation de Volterra avec une limite infinie, apparaît comme un des exemples généraux les plus simples des pareilles équations singulières.

II. — L'ÉQUATION SINGULIÈRE DE FREDHOLM.

Les noyaux singuliers G.

1. Composition de deux noyaux singuliers G. — *Le noyau composé de deux noyaux singuliers G, d'exposants α et β respectivement, est un noyau de la même forme et d'exposant $\alpha + \beta - 1$.*

La composition est faite dans l'intervalle ab ; on suppose en outre $\alpha + \beta - 1 > 0$; il est évident que dans le cas $\alpha + \beta - 1 < 0$, le noyau composé n'est plus singulier.

Soient

$$P(xy) = \frac{G_1(xy)}{|x-y|^\alpha}, \qquad Q(xy) = \frac{G_2(xy)}{|x-y|^\beta}$$

et considérons le noyau

$$(11) \qquad \int_a^b P(xs)\,Q(sy)\,ds = \int_a^b \frac{G_1(xs)\,G_2(sy)}{|x-s|^\alpha\,|s-y|^\beta}\,ds.$$

Supposons par exemple $y < x$. Nous divisons l'intervalle ab en trois intervalles partiels : ay, yx et xb ; soient I_1, I_2 et I_3 les parties de l'intégrale (11), relatives à ces intervalles respectivement.

Evaluons d'abord I_2 ; on a

$$(12)\ |I_2| \leq \int_y^x \frac{|G_1(xs)|\,|G_2(sy)|}{|x-s|^\alpha\,|s-y|^\beta}\,ds \leq G^2 \int_y^x \frac{ds}{(x-s)^\alpha\,(s-y)^\beta}.$$

Si l'on fait le changement de variable

$$s = y + (x-y)t$$

l'intégrale du dernier membre des inégalités (12) devient

$$\frac{A_2}{(x-y)^{\alpha+\beta-1}}$$

en posant

$$A_2 = \int_0^1 \frac{dt}{(1-t)^\alpha t^\beta}.$$

On a donc

$$|I_2| \leq \frac{A_2 G^2}{|x-y|^{\alpha+\beta-1}}.$$

Le même calcul nous montre en même temps que

$$|I_1| < \frac{A_1 G^2}{|x-y|^{\alpha+\beta-1}}$$

où l'on a, en posant $a_1 = \frac{a-y}{x-y}$, pour toute valeur de x et y à l'intérieur de ab,

$$A_1 = \int_{a_1}^1 \frac{dt}{(1-t)^\alpha t^\beta} < \int_{-\infty}^1 \frac{dt}{(1-t)^\alpha t^\beta}$$

ce qui prouve que A_1 est fini, en vertu de l'hypothèse $\alpha + \beta > 1$; un raisonnement identique est applicable pour A_3. On a donc

$$\left| \int P(xs)\, Q(sy)\, ds \right| < \frac{G^2(A_1 + A_2 + A_3)}{|x - y|^{\alpha + \beta - 1}}$$

ce qui démontre le théorème.

Propriétés des noyaux itérés. — 1° *Le noyau itéré d'ordre k d'un noyau singulier* G, *est un noyau de la même forme, d'exposant* $(k+1)\alpha - k$, *si cet exposant est positif.*

En effet d'après le théorème précédent, une itération augmente l'exposant de $\alpha - 1$; après k itérations, l'exposant sera donc bien égal à

$$\alpha + k(\alpha - 1) = (k + 1)\alpha - k.$$

2° *La suite des noyaux itérés d'un noyau singulier* G, *ne contient qu'un nombre fini de noyaux singuliers.*

Si k est le premier nombre entier plus grand que $\frac{\alpha}{1 - \alpha}$, le noyau itéré d'ordre k ne devient plus infini pour $x = y$. En effet, si $k > \frac{\alpha}{1 - \alpha}$, on aura $(k + 1)\alpha - k < 0$.

On peut énoncer ce résultat aussi sous la forme suivante. Considérons la suite des fractions de la forme $\frac{n}{n + 1}$, si $\frac{k}{k + 1}$ est plus grand que α, le noyau itéré d'ordre k ne devient plus infini pour $x = y$.

9. Autre formule pour la solution de l'équation de Fredholm. — La formule de Fredholm

$$\mathfrak{N}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \lambda) = \frac{D\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \lambda)}{D(\lambda)}$$

n'est plus applicable dans le cas d'un noyau singulier G, car l'une au moins des traces du noyau G, est infinie. Or la formule [1]:

$$(13) \qquad -\frac{D'(\lambda)}{D(\lambda)} = u_1 + u_2\lambda + \ldots\ldots + u_k\lambda^{k-1} + \ldots\ldots$$

[1] Pour faciliter l'écriture nous écrirons dans ce chapitre, l'équation de Fredholm, avec le signe — devant l'intégrale.

ou, son équivalente

$$(14) \qquad D(\lambda) = e^{-\frac{n_1\lambda}{1} - \frac{n_2\lambda^2}{2} - \dots - \frac{n_k\lambda^k}{k} - \dots}$$

nous montre que D(λ) est une fonction bien déterminée des traces du noyau.

Pour obtenir une autre formule, applicable aussi aux noyaux G, nous procéderons de la manière suivante :

Faisons dans l'expression (13) de D(λ), $n_1 = n_2 \dots = n_{k-1} = n_k = 0$, et désignons $\mathfrak{D}_k(\lambda)$ la fonction ainsi obtenue. En vertu des relations (13) et (14), il est évident que l'on aura :

$$(15) \qquad \mathfrak{D}_k(\lambda) = D(\lambda) e^{\frac{n_1\lambda}{1} + \frac{n_2\lambda^2}{2} + \dots + \frac{n_k\lambda^k}{k}}$$

et par conséquent :

$$(16) \qquad -\frac{\mathfrak{D}'_k(\lambda)}{\mathfrak{D}_k(\lambda)} = n_{k+1}\lambda^k + n_{k+2}\lambda^{k+1} + \dots$$

Pour obtenir maintenant la fonction du numérateur, nous utiliserons les relations d'identification

$$(17) \qquad \begin{cases} A_0(xy) = N(xy) \\ A_1(xy) = N(xy)\, a_1 + \int N(xs) A_0(sy)\, ds \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ A_p(xy) = N(xy)\, a_p + \int N(xs) A_{p-1}(sy)\, ds \end{cases}$$

où a_p désignent maintenant *les coefficients de* $\mathfrak{D}_k(\lambda)$; en particulier on a : $a_1 = a_2 = \dots = a_k = 0$. A cause du caractère de récurrence des relations (17) ; la fonction $\sum_{p=0}^{\infty} A_p(xy)\lambda^p$, que nous désignerons par $\mathfrak{D}_k\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \lambda\right)$ est la même que celle obtenue en faisant directement $n_1 = n_2 = \dots = n_k = 0$, dans l'expression de $D\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \lambda\right)$.

Nous avons ainsi obtenu deux séries en λ, $\mathfrak{D}_k\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \lambda\right)$ et $\mathfrak{D}_k(\lambda)$ dont les coefficients ont un sens parfaitement déterminé,

aussi dans le cas du noyau singulier G, pour lequel $(k+1)\alpha - k < 0$: en outre, l'expression

$$\frac{\mathfrak{D}_k\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \lambda}{\mathfrak{D}_k(\lambda)}$$

vérifie formellement l'équation de Fredholm.

Il nous reste maintenant à démontrer qu'elles sont aussi des fonctions *entières* de λ. Dans ce cas, on aura

$$\mathfrak{R}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \lambda = \frac{D\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \lambda}{D(\lambda)} = \frac{\mathfrak{D}_k\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \lambda}{\mathfrak{D}_k(\lambda)}$$

ce qui en tenant compte de (15), nous donne :

$$\mathfrak{D}_k\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \lambda = e^{n_1\frac{\lambda}{1} + n_2\frac{\lambda^2}{2} + \dots + n_k\frac{\lambda^k}{k}} D\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \lambda.$$

Nous établirons cette propriété pour $\mathfrak{D}_k(\lambda)$. Remarquons pour cela, que la formule (16) peut encore s'écrire, en groupant les termes de k en k :

$$(18) \quad -\frac{\mathfrak{D}'_k(\lambda)}{\mathfrak{D}_k(\lambda)} = \sum_{p=1}^{\infty} n_{pk+1}\lambda^{pk} + \lambda \sum_{p=1}^{\infty} n_{pk+2}\lambda^{pk} + \dots + \lambda^{k-1} \sum_{p=1}^{\infty} n_{pk+k}\lambda^{pk}$$
$$= \Delta_1(\lambda^k) + \lambda\Delta_2(\lambda^k) + \dots + \lambda^{k-1}\Delta_k(\lambda^k).$$

Le second membre de (18) est une fonction méromorphe de λ. En effet, l'expression :

$$\mathfrak{R}_r(xy) = \sum_{p=1}^{\infty} N_{pk+r-1}(xy)\lambda^{pk}$$

est l'élément analytique de la solution de l'équation intégrale

$$\mathfrak{R}_r(xy) = N_{k+r-1}(xy) + \lambda^k \int N_k(xs)\,\mathfrak{R}_r(sy)\,ds.$$

C'est donc une fonction méromorphe de λ, parfaitement déterminée, puisque le noyau $N_k(xy)$ n'est plus singulier. Mais, d'autre part, on a :

$$\Delta_r(\lambda) = \lambda^k \int \mathfrak{R}_r(ss)\,ds.$$

La fonction $\Delta_k(\lambda)$ est donc aussi une fonction méromorphe de λ. Le second membre de (18) sera donc lui-même une fonction méromorphe de λ, puisqu'il est la somme de k fonctions méromorphes. Or, *il est identiquement égal* à la dérivée logarithmique d'une fonction ; cette première fonction ne peut donc être qu'une fonction entière de λ [1].

10. L'ordre de $\mathfrak{D}_k(\lambda)$. Extension de la théorie, aux noyaux singuliers G. — Pour déterminer l'ordre de $\mathfrak{D}_k(\lambda)$, nous allons d'abord établir une formule préliminaire. Dans la relation

$$\log D(\lambda) = -\frac{n_1\lambda}{1} - \frac{n_2\lambda^2}{2} - \dots - n_k\frac{\lambda^k}{k} - \dots$$

remplaçons λ respectivement par $\lambda, \alpha\lambda, \dots \alpha^k\lambda$, en désignant par α une racine primitive de degré $k+1$ de l'unité. Ajoutons ensuite ces $k+1$ relations, membre à membre, nous obtenons

$$(19)\qquad \log D(\lambda).D(\alpha\lambda)\dots D(\alpha^k\lambda) = -\sum_{p=1}^{\infty} \frac{n_{(k+1)p}\lambda^{(k+1)p}}{p}.$$

Soit $D_k(\lambda)$ la fonction déterminante du noyau $N_k(xy)$; on reconnaît de suite que le second membre de (19), n'est autre chose que $\log D_k(\lambda^{k+1})$. On aura donc, en passant des logarithmes aux nombres

$$D(\lambda).D(\alpha\lambda)\dots D(\alpha^k\lambda) = D_k(\lambda^{k+1}).$$

On en déduit immédiatement, [2] en vertu de (15)

$$\mathfrak{D}_k(\lambda)\mathfrak{D}_k(\alpha\lambda)\dots\mathfrak{D}_k(\alpha^k\lambda) = D(\lambda).D(\alpha\lambda)\dots D(\alpha^k\lambda) = D_k(\lambda^{k+1}).$$

---

(1) Voir H. Poincaré, *Remarques diverses sur l'éq. de Fredholm* (Acta Math. tome 33, 1910) et T. Lalesco, *Sur l'ordre de la fonction* D(λ) *de Fredholm*. Comptes Rendus, Paris 1907, t. 145, page 1136.

(2) On peut établir, par la même méthode une formule analogue pour $\mathfrak{N}(xy\lambda)$; on a :

$$\mathfrak{N}(xy,\lambda).\mathfrak{N}(xy;\alpha\lambda)\dots\mathfrak{N}(xy,\alpha^k\lambda) = \mathfrak{N}_k(xy;\lambda^{k+1}).$$

Il en résulte, une formule analogue aussi pour $\mathfrak{D}_k(xy,\lambda)$.

Soit maintenant m, l'ordre de $\mathfrak{D}_k(\lambda)$. Comme les fonctions $\mathfrak{D}_k(\alpha^q\lambda)$ ont évidemment le même ordre, leur produit sera aussi d'ordre m. Mais l'égalité précédente nous montre que l'ordre du produit est égal à celui de $D_k(\lambda^{k+1})$ qui, nous le savons, est au plus égal à $2(k+1)$. Il résulte donc que

$$m \leq 2(k+1).$$

L'ordre de la fonction $\mathfrak{D}_k(\lambda)$ est donc au plus égal à $2k+2$.

La formule

$$-\log \mathfrak{D}_k(\lambda) = \frac{u_{k+1}\lambda^{k+1}}{k+1} + \ldots\ldots$$

nous permet alors d'en conclure le théorème suivant :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un noyau singulier G, d'exposants α et k [1], *n'ait aucune valeur caractéristique, est que ses traces, à partir de celle de rang $2k+3$, soient toutes nulles.*

Toute la théorie des noyaux réguliers, est dès lors *entièrement* applicable aussi aux noyaux singuliers G.

Remarque. — Pour le cas $\alpha < \frac{1}{2}$, on peut facilement obtenir la suprression du facteur $e^{u_1\lambda}$, dans les formules mêmes de Fredholm. Il suffit de remplacer dans chacun des déterminants $N\begin{pmatrix} x_1 x_2 \ldots x_p \\ x_1 x_2 \ldots x_p \end{pmatrix}$ et $N\begin{pmatrix} x x_1 x_2 \ldots x_p \\ y x_1 x_2 \ldots x_p \end{pmatrix}$, les termes de la diagonale principale par zéros.

Cette élégante remarque est due à M. D. Hilbert [2]; elle paraît difficilement susceptible d'une généralisation directe.

L'équation de Fredholm dans le domaine complexe.

11. — Considérons l'équation

$$\varphi(x) - \lambda \int N(xs)\varphi(s)\, ds = f(x)$$

---

(1) On peut désigner ainsi, pour abréger, un noyau singulier G d'exposant α, dont le k-me noyaux itéré est l'expression qui ne devient plus infini pour $x = y$.

(2) *Gött. Nachr. Erste Mitt.* 1904, page 81.

où $N(xy)$ désigne d'abord une fonction analytique entière par rapport aux deux variables x et y.

Prenons à la place de l'intervalle réel (ab), une courbe quelconque d'intégration C_1 entre les affixes a et b.

Les formules de M. Fredholm sont évidemment aussi applicables sur le chemin complexe C_1, à condition de remplacer partout les intégrales rectilignes par des intégrales de variable complexe le long de C_1. De cette façon, on peut définir une fonction de variable complexe parfaitement déterminée tout le long de la courbe C_1 et que nous écrirons sous la forme :

$$\varphi(x\,;a,b).$$

Cette fonction est une fonction uniforme de x et des paramètres a et b. — En effet les diverses intégrales qui figurent dans l'expression de $\varphi(x\,;a,b)$ ne dépendent pas de la courbe C_1, si l'on fixe les points x, a, et b, puisque $N(xy)$ est une fonction entière de x et y.

Cette propriété importante *ne se maintient plus* si le noyau n'est plus une fonction entière. Dans ce dernier cas, la fonction $\varphi(x\,;a,b)$ est une fonction *multiforme* et cette circonstance nous donne déjà une indication sur la complication du problème. Prenons, avec M. E. Picard [1], l'exemple le plus simple du noyau $N(xy) = \frac{1}{x}$, c'est-à-dire, considérons l'équation intégrale

$$\varphi(x) - \int_{C_1} \frac{1}{x}\varphi(s)ds = f(x)$$

ou

$$x\varphi(x) - \int_{C_1} \varphi(s)ds = xf(x).$$

Sa solution est immédiate ; en posant

$$\int_{C_1} \varphi(s)ds \quad K$$

[1] E. Picard, *Un théorème sur les équations intégrales de 3me espèce.* (Comptes Rendus, Février 1910, tome 152).

on a :

$$\varphi(x) = f(x) + \frac{K}{x}.$$

La constante K se détermine en intégrant cette relation le long de C_1, ce qui nous donne

$$K = \int_{C_1} f(s)ds + K\int_{C_1} \frac{ds}{s}$$

d'où

$$K = \frac{\int_{C_1} f(s)ds}{1 - \int_{C_1} \frac{ds}{s}}$$

on a donc finalement

$$\varphi(x) = f(x) + \frac{1}{x}\frac{\int_{C_1} f(s)ds}{1 - \int_{C_1} \frac{ds}{s}}.$$

Prenons comme extrémités a et b de la courbe C_1, deux points réels, l'un sur l'axe positive et l'autre sur l'axe négative. Il est bien évident que $f(x)$ est une fonction multiforme, puisque

$$\int_{ab} \frac{ds}{s} = \log\left|\frac{b}{a}\right| + 2ni\pi.$$

De sorte que la valeur de la fonction $f(x)$, apparaît comme *dépendant du paramètre arbitraire entier n.*

Le chemin d'intégration ne doit pas évidemment passer par l'origine, de sorte que si l'on veut se maintenir sur l'axe réel, il faudra tourner autour de l'origine, où bien comme l'a indiqué M. E. Picard, d'exclure un petit intervalle (ε, η) autour de l'origine et de faire tendre ensuite ε et η simultanément vers zéro suivant un rapport constant ; la solution apparaît alors comme dépendant d'un paramètre absolument arbitraire.

12. Théorème de M. E. Picard (¹). — D'une façon plus générale, considérons le noyau $\frac{1}{x} N(xy)$, où $N(xy)$ désigne une fonction entière de x et de y. On peut démontrer que *la solution de l'équation de Fredholm correspondante est, dans le domaine complexe, une fonction multiforme, dépendant homographiquement d'un paramètre arbitraire.*

Il suffira pour cela de démontrer que les fonctions $D\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\lambda)$ et $D(\lambda)$ sont des fonctions qui dépendent linéairement du même paramètre entier n.

Nous ferons d'abord la remarque suivante :

Le déterminant $N\begin{pmatrix} x_1 x_2 \dots x_p \\ x_1 x_2 \dots x_p \end{pmatrix}$ *est divisible par*

$$\Delta^2 = \prod_{i,k=1}^{p} (x_i - x_k)^2,$$

si $N(xy)$ *est un noyau à dérivée lipschitzienne.* En effet le déterminant s'annulle ainsi que sa première dérivée par rapport à x_i, pour $x_i = x_k$.

Prenons maintenant l'expression :

$$(20) \qquad \int_{c_1} \frac{1}{s_1 s_2 \dots s_p} N\begin{pmatrix} s_1 s_2 \dots s_p \\ s_1 s_2 \dots s_p \end{pmatrix} ds_1 ds_2 \dots ds_p.$$

Le résidu de cette intégrale par rapport à s_1 est

$$R_p = \int_{c_1} \frac{1}{s_2 \dots s_p} N\begin{pmatrix} 0\, s_2 \dots s_p \\ 0\, s_2 \dots s_p \end{pmatrix} ds_2 \dots ds_p.$$

Or en vertu de la propriété précédente la quantité

$$N\begin{pmatrix} 0\, s_2 \dots s_p \\ 0\, s_2 \dots s_p \end{pmatrix}$$

est sûrement divisible par $s_2^2 s_3^2 s_p^2$. Le résidu R_p représente donc une fonction uniforme, qui ne dépend plus du chemin

(¹) E. PICARD, *Un théorème général sur les équations intégrales de 3ᵐᵉ espèce.* (Comptes-Rendus, 6 juin et 11 septembre 1911, tome 152). Voir aussi, id., *Sur les solutions continues des équations intégrales de 3ᵐᵉ espèce.* (Comptes-Rendus, 2 octobre 1911).

d'intégration C_1, le même pour toutes les variables $s_2 \ldots s_p$. Comme d'autre part

$$\frac{1}{s_1 s_2 \ldots s_p} N\begin{pmatrix} s_1 s_2 \ldots s_p \\ s_1 s_2 \ldots s_p \end{pmatrix}$$

est une fonction symétrique de $s_1 s_2 \ldots s_p$, il résulte bien qu'en tournant une fois autour de l'origine, dans le sens positif, l'expression (20) augmentera de $p = 2i\pi R_p$. Par conséquent dans le domaine complexe, on aura :

$$D(\lambda) = D_1(\lambda) + 2\pi i n \lambda D_2(\lambda)$$

en posant

$$D_2(\lambda) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\lambda^p}{p!} \int_{C_1} \frac{1}{s_1 s_2 \ldots s_p} N\begin{pmatrix} 0\, s_1 s_2 \ldots s_p \\ 0\, s_1 s_2 \ldots s_p \end{pmatrix} ds_1 ds_2 \ldots ds_p.$$

Les fonctions $D_1(\lambda)$ et $D_2(\lambda)$ sont évidemment des fonctions entières de λ. On aura de même, en même temps :

$$D\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\lambda = D_1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\lambda + 2\pi i n \,.\, \lambda D_2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\lambda$$

où :

$$D_2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\lambda = \sum \frac{\lambda^p}{p!} \int_{C_1} \frac{1}{s_1 s_2 \ldots s_p} N\begin{pmatrix} x\, 0\, s_1 s_2 \ldots s_p \\ y\, 0\, s_1 s_2 \ldots s_p \end{pmatrix} ds_1 ds_2 \ldots ds_p.$$

Le théorème est ainsi démontré.

Exemples divers.

13. — Nous terminons ce chapitre en donnant deux exemples typiques qui mettent bien en évidence des nouveaux phénomènes analytiques qui se présentent dans le cas de l'équation singulière de Fredholm. Nous ajoutons ensuite une remarque importante de M. E. Picard, en faisant voir que, dans le cas singulier, le caractère analytique en λ de la solution, *dépend essentiellement du second membre.*

14. Exemple de spectre segmentaire. — Considérons l'équation intégrale

$$(21) \qquad \varphi(x) - \lambda \int_0^{\infty} e^{-|x-s|} \varphi(s) ds = f(x)$$

cherchons dans quels cas, l'équation *homogène*

$$(22)\qquad \varphi(x) - \lambda \int_0^\infty e^{-|x-s|}\varphi(s)\,ds = 0$$

admettra des solutions. Dérivons pour cela (21) deux fois de suite, ce qui nous donne les équations

$$(23)\qquad \varphi'(x) + \lambda e^{-x}\int_0^x e^{s}\varphi(s)\,ds - \lambda e^{x}\int_x^\infty e^{-s}\varphi(s)\,ds = f'(x)$$

$$(24)\qquad \varphi''(x) + (2\lambda - 1)\varphi(x) = f''(x) - f(x).$$

Donc, toute solution de (22), doit vérifier l'équation

$$(25)\qquad \varphi''(x) + (2\lambda - 1)\varphi(x) = 0.$$

Réciproquement, on remonte de (24) à (21) par deux intégrations successives ; pour que les constantes d'intégration soient nulles, il faut et il suffit que :

$$(26)\qquad \begin{cases} \varphi'(0) - \lambda \displaystyle\int_0^\infty e^{-s}\varphi(s)\,ds = f'(0) \\ \varphi(0) - \lambda \displaystyle\int_0^\infty e^{-s}\varphi(s)\,ds = f(0) \end{cases}$$

que l'on obtient en faisant $x = 0$ dans les relations (23) et (21). Par conséquent, toute solution de (25) qui vérifie les conditions

$$(27)\qquad \varphi(0) = \varphi'(0) = \lambda \int_0^\infty e^{-s}\varphi(s)\,ds$$

sera aussi une solution de l'équation intégrale (22). Nous avons alors deux cas à distinguer, suivant le signe de $2\lambda - 1$.

a) Prenons d'abord $2\lambda - 1 = \mu^2$, c'est-à-dire supposons

$$\frac{1}{2} < \lambda < \infty.$$

La solution de (25) dans ce cas, qui vérifie les conditions (27) est, comme le montre un calcul facile, à un facteur arbitraire près

$$(28)\qquad \sin \mu x + \mu \cos \mu x.$$

b) Si maintenant $1 - 2\lambda = \mu^2$, il est nécessaire, pour que l'intégrale de (27) existe, que l'on ait $\mu^2 < 4$, c'est-à-dire $0 < \lambda < \frac{1}{2}$. Dans ce cas, la solution correspondante est :

$$\text{sh}\,\mu x - \mu\,\text{ch}\,\mu x. \tag{29}$$

La solution (28) est finie quelque soit x, tandis que la solution (29) devient infinie avec x. On a donc le résultat suivant :

L'équation intégrale (21) *a un spectre continu de zéro jusqu'à l'infini.* Pour chaque valeur de λ située entre 0 et 1/2 l'équation homogène a une solution et une seule qui devient infinie avec x ; entre 1/2 et $+\infty$, l'équation homogène a une solution et une seule, finie dans tout l'intervalle de zéro à l'infini positif.

15. Remarque de M. E. Picard[1]. — Passons maintenant à l'équation (21) avec second membre. Toute solution de l'équation intégrale (21) vérifie l'équation différentielle (24) et réciproquement, toute solution de (24) qui en outre, vérifie les conditions (26) sera une solution de l'équation intégrale (21). Les conditions (27) peuvent encore s'écrire

$$\varphi'(0) - f'(0) = \varphi(0) - f(0) - \lambda \int_0^{\infty} e^{-s} \varphi(s)\, ds. \tag{30}$$

Montrons, avec M. Picard, que dans ce cas, la nature analytique de la solution de l'équation intégrale (21), n'est plus aussi simple que dans le cas régulier et que même elle *dépend essentiellement du second membre.*

Prenons pour cela, d'abord :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin nx$$

---

(1) E. Picard, *Sur une équation intégrale singulière.* Comptes-Rendus, 3 octobre 1910 et 9 janvier 1911. Voir aussi, id., *Sur un exemple simple d'une équation singulière de Fredholm.* (Ann. de l'Ecole Normale supérieure, 1911).

les constantes A_n étant telles que la série $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 A_n$ soit convergente. En posant aussi

$$\varphi(x) = \sum a_n \sin nx,$$

l'équation (24) nous donne immédiatement :

$$a_n = A_n \frac{n^2+1}{n^2+1-2\lambda}.$$

La solution générale de (24) est donc, dans l'hypothèse *a* :

$$A \sin \mu x + B \cos \mu x + \sum A_n \frac{n^2+1}{n^2-\mu^2} \sin nx.$$

Les conditions (30) vont maintenant déterminer A et B ; elles nous donnent immédiatement :

$$B = A\mu + (1+\mu^2) \sum \frac{nA_n}{n^2-\mu^2}.$$

La solution générale sera donc une fonction admettant le seul point critique transcendant $\lambda = \frac{1}{2}$ et les pôles $\lambda = \frac{n^2+1}{2}$.

Prenons maintenant, le second exemple de M. E. Picard

$$f(x) = \int_0^{\infty} h(s) \sin(xs)\, ds$$

la fonction $h(x)$ étant telle que l'intégrale :

$$\int_0^{\infty} h(s) \,.\, s^2 ds$$

existe. En posant

$$\varphi(x) = \int_0^{\infty} h(s)\psi(s) \sin(xs)\, ds,$$

on obtient immédiatement de (24) :

$$\psi(s) = \frac{s^2+1}{s^2+1-2\lambda}.$$

La solution générale de (24) sera donc, dans le cas *a* :

$$\varphi(x) = A \sin \mu x + B \cos \mu x + \int_0^{\infty} \frac{s^2+1}{s^2-\mu^2} h(s) \sin(xs)\, ds.$$

Les conditions (30) nous donnent

$$B = A\mu + (1 + \mu^2) \int_0^\infty \frac{s \cdot h(s) ds}{s^2 - \mu^2}$$

Et par conséquent la solution aura la forme :

$$\varphi(x) = A (\sin \mu x + \mu \cos \mu x) + \int_0^\infty \frac{s^2 + 1}{s^2 - \mu^2} h(s) \sin (xs) ds$$

$$+ (1 + \mu^2) \int_0^\infty h(s) \cdot \frac{s ds}{s^2 - \mu^2}.$$

Si $h(x)$ est une fonction non analytique, $\varphi(x)$ admettra comme coupure essentielle, le segment $\left(\frac{1}{2}, + \infty\right)$.

16. Exemple de noyau de Fourier. — On peut [1] appeler ainsi, les noyaux ayant des valeurs caractéristiques *à une infinité de fonctions caractéristiques correspondantes.* Nous savons que cette circonstance ne peut pas avoir lieu pour l'équation régulière. Voici un exemple très simple d'une pareille singularité.

Considérons l'équation intégrale

$$(31) \qquad \varphi(x) - \lambda \int_0^\infty \sin (xs) \varphi(s) ds = f(x).$$

On a :

$$\int_0^\infty \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-as} + \frac{s}{a^2 + s^2}\right) \sin (xs) ds = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty e^{-as} \sin (xs) ds$$

$$+ \int_0^\infty \frac{s \cdot \sin (xs)}{a^2 + s^2} ds \qquad (a > 0)$$

ou, puisque :

$$\int_0^\infty e^{-as} \sin (xs) ds = \frac{x}{a^2 + x^2}$$

et

$$\int_0^\infty \frac{s \cdot \sin (xs)}{a^2 + s^2} ds = \frac{\pi}{2} e^{-ax}$$

[1] H. Weyl, *Singuläre Integralgleichungen.* (Inaugural Dissertation, 1908).

on aura

$$\int_0^{\infty} \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-as} + \frac{s}{a^2 + s^2} \right) \sin(xs) ds = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{x}{a^2 + x^2} + \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-ax} \right]$$

ce qui prouve que l'équation (31) sans second membre, admet la valeur caractéristique $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$, avec l'infinité de fonctions caractéristiques

$$\frac{x}{a^2 + x^2} + \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-ax} \quad (a > 0).$$

Le même calcul montre en même temps que l'équation (31) admet aussi la valeur caractéristique $-\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ avec les fonctions caractéristiques :

$$\frac{x}{a^2 + x^2} - \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-ax} \quad (a > 0).$$

III. — LES ÉQUATIONS INTÉGRALES D'ORDRE SUPÉRIEUR.

17. Définitions : historique. — Le passage à des équations plus générales de Fredholm et Volterra, peut être fait de deux manières différentes :

1° La fonction inconnue peut figurer dans l'équation, à des puissances de divers ordres > 1 ; par exemple

$$\varphi(x) + \lambda \int N(xs) \varphi^{r}(s) ds = f(x).$$

Ce sont les équations intégrales *non linéaires*.

2° La fonction peut figurer à des puissances *itérées* d'ordre supérieur à 1 ; par exemple, l'équation

$$\varphi(xy) + \lambda \int N(xs) \varphi(sy) ds + \mu \int N(xs) \varphi_1(sy) ds = f(xy)$$

en désignant par puissance itérée d'ordre n, l'expression

$$\varphi_n(xy) = \int \varphi(xs_1) \varphi(s_1 s_2) \ldots \varphi(s_{n-1} y) ds_1 \, ds_2 \ldots ds_{n-} .$$

Ces deux catégories d'équations ont été étudiées à un point de vue formel ; le point essentiel qui se dégage de toutes ces recherches, est une remarquable analogie avec la théorie des fonctions analytiques, tant que les opérations fonctionnelles figurent analytiquement dans les équations intégrales.

La première classe d'équations a été envisagée par M. E. Schmidt (1). Ces équations peuvent être utiles dans la théorie des équations aux dérivées partielles non linéaires.

Mais c'est surtout la seconde classe d'équations, considérée par M. Volterra (2), à un point de vue très général, qui offre un champ de recherches nouveau et présente un intérêt analytique spécial, tant par l'élégance de la méthode que pour les applications possibles dans l'étude des phénomènes non analytiques.

Nous nous bornerons à donner, ici aussi, des indications générales.

Les équations non linéaires.

18. Equation de Volterra. — Prenons l'équation de Volterra non linéaire

$$(32) \qquad \varphi(x) + \int_0^x F(x, s, \varphi(s))\, ds = f(x).$$

Nous ferons les hypothèses générales suivantes :

1° La fonction $F(x, y, z)$ est une fonction parfaitement déterminée, $< m$ dans le domaine $|x|$ et $|y| < a$, $|z| < b$, et

---

(1) E. Schmidt, *Zur Theorie der linearen und nicht linearen Integralgleichungen*. III. Teil. (Math. Ann. Bd. 68. 1908, p. 370-399).

(2) Voir à ce sujet la littérature déjà riche de l'école italienne :

V. Volterra, *Questioni generali sulle equazioni integrali ed integrodifferenziali* (Alti d. Reale Accademia dei Lincei, Février 1910) ; id., *Osservazioni sulle equazioni integro-differenziali ed integrali* (Ibid. Avril 1910) ; id., *Sopra le funzioni permutabili* (Ibid. Avril 1910) ; id., *Equazioni integro-differenziali con limiti constanti* (Janvier 1911) ; id., *Contributo allo studio delle funzioni permutabili* (Mars 1911) ; id., *Sopra le funzioni permutabili di 2a specie e le equazioni integrali* (Avril 1911).

Sinigaglia, *Sulle funzioni permutabili di seconda specie* (Ibid. Avril 1911).

Voir aussi les travaux de MM. Lauricella, Amoroso, Picone et Fubini, parus dans le même recueil (1908-1911).

vérifie par rapport à z, dans ce domaine, la condition de Lipschitz :

$$| F(x, y, z_1) - F(x, y, z_2) | < a | z_1 - z_2 |.$$

2° La fonction $f(x)$ s'annule pour $x = o$; soit $| n | < a'$, l'intervalle où l'on a $| f(x) | < b$. Elle vérifie aussi la condition de Lipschitz :

$$| f(x) - f(y) | < k | x - y |.$$

Dans ces conditions, on peut obtenir une solution de (32), à l'aide de la méthode des approximations successives, en prenant

$$\varphi_0(x) = f(x)$$

et comme équation générale de réccurence :

$$(33) \qquad \varphi_n(x) - \int_o^x F[x, s, \varphi_{n-1}(s)] ds = f(x).$$

La seconde approximation est donnée par la relation

$$\varphi_1(x) = f(x) - \int_o^x F(x, s, f(s)) ds$$

et dans l'intervalle $| x | < a'$, on a, en vertu des hypothèses précédentes :

$$| \varphi_1(x) | < (k + m) x.$$

Pour que l'on ait :

$$| \varphi_1(x) | < b$$

il suffit que :

$$| x | < \frac{b}{k + m}.$$

Si donc h *désigne le plus petit des trois nombres*, a, a' et $\frac{b}{k+m}$, on aura sûrement dans l'intervalle $| x | < h$, pour toute approximation :

$$| \varphi_n(x) | < b$$

et par conséquent toutes les approximations auront, successivement, un sens parfaitement déterminé.

Pour démontrer maintenant la convergence des approximations, il suffit de considérer la relation

$$\varphi_n(x) - \varphi_{n-1}(x) + \int_0^x [F(x, s, \varphi_{n-1}(s)) - F(x, s, \varphi_{n-2}(s))] ds = 0$$

d'où l'on déduit immédiatement :

$$|\varphi_n(x) - \varphi_{n-1}(x)| < a \int_0^x |\varphi_{n-1}(s) - \varphi_{n-2}(s)| ds$$

avec

$$|\varphi_1(x) - \varphi_0(x)| < ax.$$

On en déduit :

$$|\varphi_n(x) - \varphi_{n-1}(x)| < a \frac{x^n}{n!}$$

ce qui montre que la fonction :

$$(33') \quad \varphi_n(x) = \varphi_0(x) + [\varphi_1(x) - \varphi_0(x)] + \dots + [\varphi_n(x) - \varphi_{n-1}(x)]$$

tend bien vers une fonction limite $\varphi(x)$ qui est, d'après (33), la solution cherchée.

Remarques. — 1° La démonstration précédente, est une généralisation de celle que M. E. Picard a indiquée pour l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = F(xy).$$

On peut d'ailleurs mettre cette dernière équation sous la forme intégrale :

$$y(x) - \int_0^x F(s, y(s)) ds = C$$

et le résultat précédent, donne immédiatement, comme cas particulier, le théorème de M. E. Picard.

2° On peut s'affranchir de la condition $f(0) = 0$, tant que $f(0) = l < b$; dans ce cas on prendra comme première ap-

proximation

$$\varphi_0(x) = f(x) - f(0)$$

et l'on aura à remplacer $\frac{b}{m+k}$ par $\frac{b - l}{m+k}$ [1].

19. Equation de Fredholm. — Considérons l'équation de Fredholm non linéaire :

$$(34) \qquad \varphi(x) + \lambda \int_a^b F(x, s, \varphi(s))\, ds = f(x)$$

dans les hypothèses analogues à celles du numéro précédent.

Nous supposerons :

1° La fonction F (x, y, z) parfaitement déterminée et $< m$ si x et y ont des valeurs quelconques de l'intervalle (ab) et si $|z| < \rho$. Elle y vérifie de plus la condition de Lipschitz par rapport à z.

2° Le module maximum de la fonction $f(x) < \rho$, dans l'intervalle (ab).

Dans ces conditions, on peut appliquer exactement la même méthode d'approximations successives ; si

$$\lambda < \frac{\rho - f}{m(b-a)}$$

le raisonnement précédent nous montre que toutes les approximations auront un sens bien déterminé. On aura ensuite :

$$|\varphi_n(x) - \varphi_{n-1}(x)| < m \lambda^n k^n (b-a)^n$$

et par conséquent si

$$\lambda < \frac{1}{k(b-a)}$$

la série des approximations (33′) convergera sûrement vers une fonction qui sera la solution cherchée.

(1) Pour les systèmes d'équations non linéaires, voir : E. COTTON, *Eq. différentielles et éq. intégrales* (Bull. soc. M. de France, 1910), et les mémoires de M. E. PICONE, (Rendiconti del Circolo Math. di Palermo, 1910, 1911).

On a donc ce résultat :

Si λ est suffisamment petit, l'équation (34) *a une solution et une seule.*

Remarque. — Au lieu de la méthode des approximations successives, on peut employer la méthode des majorantes, en essayant de vérifier (34) par un développement de la forme :

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \lambda\varphi_1(x) + \dots + \lambda^n\varphi_n(x) + \dots$$

Les coefficients se calculent d'une façon régulière, et la convergence de la série, ainsi que l'unité de la solution résulte du fait que l'équation

$$\varphi(x) + \lambda F[x, x, \varphi(x)] = f(x)$$

a une solution et une seule en $\varphi(x)$, qui s'annule avec λ.

On peut d'une façon plus générale, appliquer la même méthode à l'équation

$$(35) \quad \varphi(x) + \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^m \int N_m(xs_1s_2 \dots s_m)\, \varphi(s_1)^{\alpha_1}\varphi(s_2)^{\alpha_2} \dots \varphi(s_m)^{\alpha_m} ds_1 \dots ds_m = f(x)$$

où, encore plus généralement :

$$(36) \quad \varphi(x) + \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^m \int N_m(xs_1s_2 \dots s_m) F_m[\varphi(s_1), \varphi(s_2) \dots \varphi(s_m)]\, ds_1 ds_2 \dots ds_m = f(x).$$

8. Recherches de M. Schmidt. — Dans ses recherches sur les équations non linéaires, M. E. Schmidt considère l'équation générale suivante :

$$(37) \quad \varphi(x) + \int N(xs)\varphi(s)ds + \sum \int N(xs_1s_2 \dots s_m)\varphi(s_1)^{\alpha_1}h(s_1)^{\beta_1} \dots \varphi(s_m)^{\alpha_m}h(s_m)^{\beta_m} ds_1 \dots ds_m = 0$$

où la somme est étendue à toutes les valeurs des α_i et β_i, l'un au moins des exposants α_i et β_i étant toujours différent de zéro ; la fonction inconnue est $\varphi(x)$.

Cette équation au point de vue auquel se place M. Schmidt, est entièrement équivalente à l'équation (35) à condition d'introduire dans le premier membre de (35), le terme

$$\int N(xs)\varphi(s)ds.$$

Pour la résoudre, nous avons donc deux cas à distinguer, suivant que l'équation

$$(38) \qquad \varphi(x) + \int N(xs)\varphi(s)ds = 0$$

admet des solutions différentes de zéro, ou non. Dans le second cas, en appliquant le premier théorème de Fredholm à l'équation (37), écrite sous la forme :

$$(39) \qquad \varphi(x) + \int N(xs)\varphi(s)ds = F(x)$$

on obtient une autre équation, exactement de la forme (35) et l'on retombe ainsi sur le cas précédent.

Prenons maintenant le premier cas et supposons d'abord que l'équation (38) n'admet qu'une seule solution $\varphi_1(x)$. Dans ce cas, la solution de (39) sera

$$(40) \qquad \varphi(x) = F(x) - \int \mathfrak{N}(xs)F(s)ds + a\varphi_1(x)$$

où a désigne une constante arbitraire ; *à condition que l'on ait :*

$$(41) \qquad \int F(s)\varphi_1(s)ds = 0.$$

L'élimination de $\varphi(x)$ entre les équations (40) et (41) est possible car l'équation (40) est du type régulier ; nous obtenons ainsi une équation *analytique en a* ; le nombre des solutions (40) dépend donc essentiellement de la nature de cette équation. Ce résultat est entièrement équivalent à celui de M. E. Schmidt qui appelle son équation en *a, l'équation de ramification* [1].

---

[1] Voir aussi, M. Paul Lévy, *Sur les équations intégrales non linéaires.* (Comptes-rendus, avril 1910) et G. Bratu, *Sur les équations intégrales non linéaires.* (Comptes-rendus, avril 1910).

La méthode précédente s'étend évidemment sans aucune difficulté au cas général.

Les équations d'ordre itératif supérieur

Fonctions permutables. Propriétés. — Deux fonctions $A(xy)$ et $B(xy)$ sont *permutables dans l'intervalle* xy [1], si l'on a :

$$\int_x^y A(xs)B(sy)ds = \int_x^y B(xs)A(sy)ds.$$

L'expression $AB = BA$ sera appelée *le produit composé* de A et B. On peut établir les propriétés suivantes :

a) *Une fonction est toujours permutable à elle-même.* Cette propriété est évidente. L'expression

$$\int_x^y A(xs)A(sy)ds = A_2(xy)$$

sera le *carré composé de* $A(xy)$ ou sa seconde *puissance itérée.*

b) Désignons par *puissance itérée de degré* n, l'expression définie par la relation de récurrence

$$A_n(xy) = \int_x^y A_1(xs)A_{n-1}(sy)ds$$

on a :

Deux puissances itérées d'une fonction $A(xy)$ *de degrés* m *et* n, *sont permutables entre elles et leur produit composé est égal à la puissance itérée* $m+n$ *de la fonction* $A(xy)$.

Pour établir cette proposition, il suffit, d'après un algorithme bien connu, de considérer le cas $m = 1$, $n = 2$, c'est-à-dire d'établir la relation

$$\int_x^y A_1(xs)A_2(sy)ds = \int_x^y A_2(xs)A_1(sy)ds.$$

---

(1) Permutables de première espèce, suivant M. VOLTERRA.

Or on a :

$$\int_x^y A_1(xs)A_2(sy)ds = \int_x^y A_1(xs)\int_s^y A_1(st)A_1(ty)dt$$

$$= \int_x^y A_1(ty)\int_x^t A_1(xs)A_1(st)ds = \int_x^y A_2(xt)A_1(ty)dt.$$

Ce résultat a été obtenu, appliquant tout simplement la formule de Dirichlet [1].

On a donc en général

$$A_{m+n}(xy) = \int_x^y A_m(xs)A_n(sy)ds.$$

c) *Deux sommes de fonctions permutables sont aussi permutables, et leur produit composé s'obtient d'après la règle de distributivité de la multiplication ordinaire.*

En effet, soient $A(xy)$, $B(xy)$, $C(xy)$, $D(xy)$, quatre fonctions permutables entre elles, et posons :

$$P(xy) = A(xy) + B(xy)$$
$$Q(xy) = C(xy) + D(xy).$$

On a :

$$\int_x^y P(xs)Q(sy)ds = \int_x^y [A(xs) + B(xs)][C(sy) + D(sy)]ds$$
$$= AC + AD + BC + BD.$$

Les fontions P et Q sont donc aussi permutables.

21. Corps intégral. Théorème fondamental. — Les propriétés précédentes peuvent être concentrées et présentées sous la forme suivante :

Soient $A(xy)$, $B(xy)$,... $L(xy)$ un nombre fini n de fonctions *permutables dans l'intervalle xy*, et définies dans un intervalle réel ab. Appliquons-leur un nombre fini de fois et dans un ordre arbitraire, les opérations d'addition algébrique et de multiplication composée.

---

(1) Voir aussi page 10.

La totalité des fonctions ainsi obtenues forme un corps K. — Considérons de même le corps k, des polynomes entiers des n variables α, β, ... λ à coefficients numériques quelconques. On peut établir une correspondance biunivoque entre les corps K et k ; en effet, il suffit de faire correspondre à chaque fonction de base du corps K, une variable du corps k, à la multiplication composée en K, la multiplication ordinaire en k, l'opération d'addition se correspondant à elle même.

Elargissons maintenant le champs k, en y introduisant aussi les séries entières des variables α, β, ... λ, *nulles au point* $\alpha=\beta=\gamma=\dots=\lambda=0$. Par la correspondance précédente, on obtiendra dans le corps K, aussi des séries de fonctions permutables. Or, en vertu de l'inégalité évidente

$$P_n(xy) < \frac{P^n(x-y)^n}{n!} \qquad |P(xy)| < P$$

il résulte que les séries ainsi obtenues en K, seront *toutes régulièrement convergentes* dans tout l'intervalle ab. Il est évident maintenant, que ces séries jouissent aussi des propriétés a,b,c, et par conséquent on peut les faire entrer dans le corps K.

Le corps ainsi complété, peut être appelé le *corps intégral entier* des fonctions de base $A(xy)$, $B(xy)$, ..., $L(xy)$.

Considérons maintenant une relation quelconque analytique

$$f(\alpha,\beta,\dots\lambda)=0 \qquad f(0,0,\dots 0)=0$$

résoluble à l'aide de la fonction analytique régulière :

$$\alpha=\varphi(\beta,\gamma,\dots\lambda) \qquad \varphi(0,0,\dots 0)=0.$$

Nous pouvons en conclure, *en vertu de la correspondance établie entre les corps* K *et* k, *que l'équation intégrale*

$$f(A,B,C,\dots L)=0$$

est résoluble par la formule

$$A=\varphi(B,C,\dots L).$$

22. Applications. — Prenons quelques exemples.

a) Considérons l'équation intégrale des noyaux résolvants de

l'équation de Volterra :

$$\mathfrak{N}(xy) = \mathrm{N}(xy) + \lambda \int_x^y \mathrm{N}(xs)\mathfrak{N}(sy)\,ds.$$

On sait que $\mathfrak{N}(xy)$ est permutable avec $\mathrm{N}(xy)$.

L'équation correspondante du corps analytique, sera alors

$$x = a + \lambda a x$$

d'où

$$x = \frac{a}{1 - \lambda a} = a + a^2\lambda + \ldots + a^{p+1}\lambda^p + \ldots$$

On aura donc, tout simplement :

$$\mathfrak{N}(xy) = \mathrm{N}(xy) + \lambda \mathrm{N}_2(xy) + \ldots + \lambda^p \mathrm{N}_{p+1}(xy) + \ldots$$

et cette série est une fonction entière de λ.

b) Considérons l'équation

$$\mathrm{P}_2(xy) = \mathrm{P}(xy) + \mathrm{A}(xy).$$

L'équation correspondante du champ analytique est

$$x^2 = x + a$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - \mu a}}{2}$$

d'où l'on tire :

$$x_1 = \frac{1 - \sqrt{1 - \mu a}}{2} = a - a^2 - \ldots - \frac{1 . 3 \ldots (2p - 3)}{p\,!} 2^{p-1} a^p - \ldots$$

ce qui nous donne immédiatement la solution de l'équation intégrale

$$\mathrm{P}(xy) = \mathrm{A}(xy) - \mathrm{A}_2(xy) - \ldots - \frac{1 . 3 \ldots (2p - 3)}{p\,!} 2^{p-1} \mathrm{A}_p(xy) - \ldots$$

L'autre solution x_2 ne convient pas ; en effet, elle donne une fonction qui n'est plus permutable avec $\mathrm{A}(xy)$ puisqu'elle commence par le terme constant 1.

c) Prenons enfin, avec M. V. Volterra, un exemple d'un genre tout-à-fait différent. Considérons la fonction

$$\mathrm{A}(xy;\lambda) = \lambda \mathrm{A}(xy) + \frac{\lambda^2}{2} \mathrm{A}_2(xy) + \ldots + \frac{\lambda^n}{n\,!} \mathrm{A}_n(xy) + \ldots$$

C'est une fonction entière de λ ; elle correspond en k à la fonction

$$e^{\lambda a} - 1.$$

Or on a :

$$\begin{aligned}(e^{\lambda a} - 1)(e^{\mu a} - 1) &= e^{a(\lambda + \mu)} - e^{\lambda a} - e^{\mu a} + 1 \\ &= e^{a(\lambda + \mu)} - 1 - (e^{\lambda a} - 1) - (e^{\mu a} - 1).\end{aligned}$$

On aura donc immédiatement :

$$V(xy; \lambda + \mu) = V(xy; \lambda) + V(xy; \mu) + \int V(xs; \lambda) V(sy; \mu) ds$$

ce qui établit pour la fonction $V(xy\lambda)$ *un théorème d'addition intégrale.*

23. Fonctions permutables dans un intervalle fixe [1]. — Si deux fonctions $A(xy)$ et $B(xy)$ sont telles que

$$\int_a^b A(xs) B(sy) ds = \int_a^b B(xs) A(sy) ds$$

nous dirons qu'elles sont *permutables dans l'intervalle ab.*

Toutes les propriétés démontrées au n° 1 de ce paragraphe, sont aussi vraies pour cette nouvelle classe de fonctions, comme il est très facile de s'en assurer.

On peut obtenir des résultats analogues à ceux obtenus précédemment, de la façon suivante :

Considérons le corps k des fonctions *entières ou méromorphes de* λ et qui s'annulent avec λ. Considérons en même temps, le corps K des fonctions que l'on obtient en remplaçant dans les fonctions de k, les puissances de λ par des puissances composées d'une fonction $A(xy)$.

Les fonctions du corps K *sont aussi des fonctions entières ou méromorphes de* λ. C'est une conséquence immédiate du premier théorème de Fredholm. En effet, en vertu du théorème de M. Mittag-Leffler, l'expression générale d'une classe géné-

---

[1] Fonctions permutables de seconde espèce, suivant M. VOLTERRA.

rale de fonctions méromorphes de λ, est

$$f(\lambda) + \sum_{q=1}^{\infty} \left[\frac{A_1}{a_q - \lambda} + \frac{A_2}{(a_q - \lambda)^2} + \dots + \frac{A_m}{(a_q - \lambda)^m} + P_q(\lambda)\right]$$

où $P_q(\lambda)$ désigne un polynome de λ, et $f(\lambda)$ une fonction entière. Or en vertu du premier théorème de M. Fredholm, la fonction du corps K qui correspond à $\frac{A_1}{a_q - \lambda}$, est la fonction méromorphe

$$\frac{A_1}{a_q} \frac{D\left(xy\,;\,\frac{\lambda}{a_q}\right)}{D\left(\frac{\lambda}{a_q}\right)}.$$

De même, la fonction qui correspond à : $\frac{1}{(a_q - \lambda)^p}$ est à un facteur près, la dérivée d'ordre p par rapport à $\frac{\lambda}{a_q}$, de la fonction méromorphe précédente.

Enfin, à une fonction entière de λ en k, correspond en K, aussi une fonction entière de λ.

Le théorème est ainsi démontré. Il résulte de là, que le *théorème général* du n° 2, sur la résolution des équations intégrales, *est aussi valable dans le champ* K *des nouvelles fonctions*. De plus, les solutions sont *des fonctions méromorphes de* λ.

24. Extension du corps K. — On peut, dans les deux cas, se proposer de poursuivre plus loin l'analogie entre les corps K et k, au point de vue suivant :

Si nous prenons une relation algébrique

$$F(xy) = 0 \qquad F(0,0) = 0$$

et si l'on se trouve dans le cas général, les cycles des déterminations de y qui s'annulent pour $x = 0$, seront données par le théorème de Puiseux, et l'on aura, pour ces fonctions, des développements suivant les puissances fractionnaires de x. Il y a alors lieu de chercher les analogues en K, de ces fonctions. Le premier problème fondamental à résoudre, sera l'étude de l'équation intégrale *binome :*

$$P_n(xy) = A(xy).$$

On poura dès lors étendre plus loin, la correspondance entre les corps K et k, en faisant correspondre à $\sqrt[n]{\alpha}$, la fonction P(xy) que l'on peut désigner par le symbole $A_{\frac{1}{n}}(xy)$.

Ce point de vue, suggère, entre autres, une remarquable analogie entre la théorie de Puiseux pour les équations algébriques et la théorie de Fuchs pour les équations différentielles linéaires. Nous nous bornons pour le moment à ce court aperçu, en renvoyant au livre de M. V. Volterra (1).

(1) Ce livre est actuellement sous presse.

BIBLIOGRAPHIE.

Ouvrages parus.

1. S. Pincherle, *Funktional operationen und Gleichungen*. Encyklopädie der Math. Wiss. Bd· II, 1 Heft 6, 1906.
2. Robert d'Adhémar, *Exercices et leçons d'Analyse*. Paris, Gauthier-Villars, 1908 (p. 121-184).
3. Robert d'Adhémar, *L'équation de Fredholm et les problèmes de Dirichlet et Neumann*. Paris, Librairie A. Hermann. 1909.
4. M. Bôcher, *An introduction to the study of integral équations*. N° 10 Cambridge Tracts, 1909. University Press. Cambridge.
5. J. Horn, *Einführung in die Theorie der Partiellen Diff. Gleichungen*. V, VI und VIII Abschnitt, p. 183-332. Sammlung Schubert, 1910.
6. G. Kowalewski, *Einführung in die Determinanten Theorie*. 18 und 19 cap. (p. 455-505). Verlag von Veit et C., 1909.
7. H. Poincaré, *Sechs Vorträge aus der reinen Mathematik und Math. Physik*. Teubner, 1910.
8. H. Poincaré, *Leçons de Mécanique céleste*. Tome III. *Théorie des marées*. (Chap X, p. 233-303). Paris, Gauthier-Villars. 1910.
9. A. Korn, *Über freie und erzwugene Schwingungen. Eine Einführung in die Theorie der linearen Integralgleichungen*, 1911.
10. Kneser, *Die Integralgleichungen und ihre Anwendungen in der Math. Physik*. Braunschweig. Vierweg et Sohn, 1911.

Mémoires (concernant la partie théorique).

1826. N. H. Abel, *Auflösung einer mech. Aufgabe*. (Crelles J. 2).

1837. J. Liouville, *Sur le développement des fonctions ou parties de fonctions en séries dont les divers termes sont assujettis à satisfaire à une même équation différentielle du 2e ordre, contenant un paramètre variable*. (J. de Math. 2, p. 16, 220, 418. Voir aussi, *Comptes Rendus*, Paris IV).

Id., *Solution nouvelle d'un problème d'Analyse, relatif aux phén. thermomécaniques*. (J. de Math. 2).

1838. J. Liouville. *Premier mémoire sur la théorie des équations différentielles linéaires et sur le développement des fonctions en séries.* J. de Math. 3

1884. N. Sonine, *Sur la généralisation d'une formule d'Abel.* (Acta Math. 4).

1894. J. Le Roux, *Sur les intégrales des équations linéaires, etc.* (Thèse de Doctorat.

1896. V. Volterra, *Sulla inversione degli integrali definiti.* (Atti Torino et Atti Lincei).

1897. V. Volterra, *Sopra alcuni questioni di inversione di integrali definiti.* [Ann. di Math. 25 (2)].

1900. I. Fredholm, *Sur une nouvelle méthode pour la résolution du problème de Dirichlet.* (Ofv. of Kongl Sv. Vetens kaps Akad Förh.).

E. Holmgren, *Sur l'inversion des intégrales définies.* (Bihang t. Kongl-Svenska V. Akad-Handl.).

1901. E. Cesaro, *Sopra un equazione funzionale, trattata da Beltrami.* (Rend. Acad. Napoli).

I. Fredholm, *Sur une classe de transformations rationelles* (Comptes-Rendus, Paris, 133).

1902. I. Fredholm, *Sur une classe d'équations fonctionnelles.* (Comptes-Rendus, Paris, 134).

O. Kellog, *Zur Theorie der Integralgleichungen, etc.* Gött. Nachrichten).

1903. E. Goursat, *Sur un problème d'inversion, résolu par Abel.* (Acta Math. 27).

I. Fredholm, *Sur une classe d'équations fonctionnelles* Acta Math. 27).

J. Plemelj, *Über die Anwendung der Fredholmschen Functionalgleichungen, in der Potentialtheorie.* (Sitzungsberichte der K. K. Akad. d. Wiss., Wien).

Id., *Zur Theorie der Fredholmschen Funktionalgleichung.* (Monatshefte für Math. u. Physik

W. Ritz, *Zur Theorie der Serienspektren.* (Inaugural Dissertation, Göttingen, p. 24 *et Œuvres complètes* 1911.

1904. G. Fubini, *Sull'inversione degli integrali definiti.* [Rend. Accc. (3)].

D. Hilbert, *Grundzüge einer allgemeinen Th. der linearen Integralgleichungen* (Gött. Nachrichten, 1 Mitteilung).

O. D. Kellog, *Unstetigkeiten in der linearen Integralgleichungen.* (Math. Ann. 58).

E. Picard, *Sur une équation fonctionnelle.* (Comptes-Rendus. Paris 139).

1905. G. Fubini, *Sopra una formole del Fredholm nel problema dell inversione degli integrali definiti.* (Boll. Accad. Catania).

E. Schmidt, *Entwicklung willk. Functionen nach Syst. vorgeschriebener.* (Dissertation Göttingen).

1906. H. Bateman, *Sur l'équation de Fredholm* (Bull. Sc. Math.).

Id., *A class of integral equations.* (Trans. of the Cambr. Phil. Soc.)

Id., *The theory of integral equations.* (Cambr. Trans. Phil. Soc. 20).

D. Hilbert, *Grundzüge*, etc. (Gött. Nachrichten, 5e Mitteilung).

E. Holmgren, *La théorie des équations intégrales linéaires.* (Ark. Mat. Stockolm, 3, n° 1).

A. Kneser, *Ein Beitrag zur Theorie der Integralgleichungen.* (Rendiconti Palermo, 21).

E. Picard, *Sur quelques applications de l'équation fonctionnelle de Fredholm.* (Rendiconti Palermo, t. 21).

Id., *Sur quelques problèmes de Phys. Math. se rattachant à l'équation de Fredholm.* (Ann. de l'Ecole Normale).

1907. H. Bateman, *On the inversion of a definite integral.* (Proc. London Mat. Soc. (2) 4).

H. Block, *Sur la solution de certaines équations intégrales.* (Ark. för Mat. Vet. Akademien, III).

T. Boggio, *Un théorème sur les equations intégrales.* (C. R. Paris, 145).

E. Bounitzky, *Un système particulier d'équations intégrales.* (Bull. Sc. Math.).

E. Goursat, *Sur un cas élémentaire de l'equation de Fredholm.* (Bull. Soc. Math. France, 35).

Id., *Sur les équations intégrales.* (Comptes Rendus, Paris, 145).

Id., *Sur un théorème de la théorie des équations intégrales.* (Comptes-Rendus, Paris, 146).

P. Hertz. *Die Integralgleichungen der Elektronentheorie.* (Math. Ann. 65).

B. Heywood, *Sur quelques points de la théorie des fonctions fondamentales relatives à certaines équations intégrales.* (Comptes-Rendus, 145).

A. Korn, *Sur l'équation fonctionnelle de Fredholm.* (Comptes-Rendus, Paris, 144).

T. Lalesco, *Sur l'ordre de la fonction entière* D(λ). (Comptes-Rendus, Paris, 144).

E. Levi, *Sulle equazioni integrali.* (Atti Lincei).

A. Myller, *Sur les équations intégrales.* (Bull. des Sc. Math.).

V. Myller Lebedeff, *Die Integralgleichungen in Anwendung auf einige Reihenentwicklungen.* (Math. Ann. 64).

L. Orlando, *Sopra alcune equazione integrali.* (Atti Lincei

E. Picard, *Sur une équation fonctionnelle se présentant dans la théorie de certaines éq. aux dér. partielles.* (C. R. Paris, 144).

S. Pincherle, *Sull'inversione analitica degl'integrali definiti.* (Rend. Acc. Bologni).

F. Riesz, *Sur les systèmes orthogonaux et l'équation de Fredholm.* (C. R. Paris, 144).

R. d'Adhémar, *Les fonctions implicites de l'équation intégrale non linéaire* (Bull. Soc. Mat. Fr., 36).

1908. H. Bateman, *Notes on integral équations.* (Mess. Math. 38).

—, *A formula for the solving function of a certain integral of the second Kind.* (Mess. of Math., 37)

T. Boggio, *Sopra alcune formole fondamentali alle equazione integrali.* (Atti Lincei).

E. Bounitzky, *Sur une classe d'équations intégrales* (Bull. des Sc. Math.).

E. Fischer, *Sur la convergence en moyenne.* (C. R. Paris, 144).

E. Goursat, *Recherches sur les équations intégrales linéaires.* [Ann. de la Fac. de Toulouse, 10 (2)].

B. Heywood, *Sur l'équation fonctionnelle de Fredholm.* [Journ. de Math., 4 (6)].
T. Lalesco, *Sur l'équation de Volterra.* [Journ. de Math., 4 (6)].
G. Lauricella, *Sopra alcune equazione differenziali lineari.* (Atti Lincei).
Id., *Sulle equazioni integrali.* [Ann. di Mat., 15 (3)].
H. Lebesgue, *Sur la méthode de Goursat pour la résolution de l'équation de Fredholm.* (Bull. Soc. Mat. Fr., 36).
H Mercer, *Plemeljs canonical Form.* (Trans. Cambr. Soc., 21, p. 129).
L. Orlando, *Sulle eq. integrali.* (Giornale di Battaglini).
S. Pincherle, *Sull'inversione degl'integrali definiti.* (Mem. di Mat. Soc. It. Sc., 15).
E. Schmidt, *Zur Theorie der linearen und nicht linearen Integralgleichungen.* (Mat. Ann., 65).
J. Schur, *Über die charakteristischen Wurzeln einer linearen Substitution mit. einer Anwendung auf die hTeorie der Integralgleichung.* (Math. Ann, 66).
L. Sinigaglia, *Sulle equazione differenziali lineari.* (Atti Lincei).
H. Weyl, *Singuläre Integralgleichungen.* (Math. Ann., 66).
1909. R. d'Adhémar, *Sur les équations intégrales de M. Volterra.* (Atti IV. congr Rome).
L. Amoroso, *Ricerche interno alle equazione integrali lineari di prima specie.* (Ann. di Mat.).
H. Bateman, *Notes on integral equations.* (Mess. of. Mat, 38)
G. Bratu, *Sur les équations mixtes linéaires.* (C. R. Paris, 148).
A. Chicca, *Sulle equazioni integrali di Fredholm a nucleo simetrico.* (Atti Ac. Torino).
U. Crudeli, *Contributo alla teoria di certe equazioni funzionali.* (Atti Lincei).
A. C. Dixon. *The solution of integral equations* [Proced. London Math. Soc. (2)].
G. C. Evans, *The integral equation of the second kind of* Volterra, *with singular Kernel.* (Bull. of the American Math. Soc., 16).
E. Goursat. *Sur quelques points de la théorie des équations intégrales.* (Bull. Soc. Math. Fr., 37).
Id., *Recherches sur les équations intégrales linéaires.* [Ann. Toulouse, 10 (2)]
G. H. Hardy, *On a integral equation.* [Proc. London Math. Soc. 7 (2)].
W. H. Joung, *On bounded not necessarly continuons solutions of integral equations.* (The Qualerly Journ. of Math., 41).
G. Lauricella, *Sull'equazione integrale di 1ª specie* (Atti Lincei).
J. Marty, *Transformation d'un dét. infini en un dét. de Fredholm.* (Bull. Sc. Math.).
J. Mercer, *Fonctions of positive and negative type, and their connection with the theory of integral equations.* (Phil. Trans. R. Soc., 209 A, p. 415-446).
J. Mollerup, *Une remarque sur les équations intégrales de 1re espèce.* (Rend. Palermo, 29).

R. Marcolongo, *La théorie des équations intégrales et ses applications* [Ann. Toulouse, 10 (2)]

L. Orlando, *Sulla risoluzione delle eq. integrali.* (Atti IV Congresso, Roma).

E. Picard, *Sur un théorème général relatif aux équations intégrales de 1re espèce et sur quelques problèmes de Physique Mat.* (Rend. Palermo, 29).

Id., *Sur une classe de dév. en séries de fonctions fondamentales se rattachant à certaines équations fonctionnelles* (C. R. Paris, 149).

Id., *Sur les équations intégrales de première espèce* (C. R. 14 Juin et 28 Juin, 1909).

S. Pincherle, *Sopra certe equazione integrali.* (Atti Lincei).

H. Poincaré, *Sur quelques applications de la méthode de Fredholm.* (C. R. Paris, 148).

M. Plancherel, *Über singuläre Integralgleichungen.* (Math. Ann., 67).

F. Riesz, *Uber die lineare homogene Integralgleichung.* (Math. ès term. értesilö. Budapest, 27).

P. Saurel, *On Fredholm's equation.* (Bull. of the Ann. Math. Soc., 15).

J. Schur, *Zur theorie der linearen homog. Integralgleichungen.* (Math. Ann., 67).

V. Volterra, *Sulle equazione integro differenziali.* (Atti. Lincei).

H. Weyl, *Convergenz von Reihen die nach. orth. Funct. fortschreiten.* (Math. Ann., 67).

1910. L. Amoroso. *Sulla risolubilità della equazione integrale di prima specie.* (Atti Lincei).

Id., *Alcune osservazioni intorno alla teoria delle serie di Fourier-Hilbert Schmidt.* (Atti-Lincei).

A. Blondel, *Sur une équation fonctionnelle linéaire.* (C. R. Paris, 150).

G. Bratu, *Sur certaines équations intégrales non linéaires.* (C. R. Paris, 150).

E. Cotton, *Equations différentielles et équations intégrales.* (Bull. Soc. Math. France).

G. Fubini, *Di alcune nuove classi di equazioni integrali.* (Atti Lincei).

Id., *Equazioni integrali e valori eccezionali.* (Ann. di Mat.).

N. Kryloff, *Sur les dév. proc. suivant les polynomes hypergéométriques.* (C. R. Paris, 150).

T. Lalesco, *Sur les noyaux résolvants.* (C. R. Paris, 151).

Id., *Sur les pôles des noyaux résolvants.* (C. R. Paris, 151).

Id., *Sur les noyaux symétriques gauches.* (C. R. Paris, 151).

A. Landsberg, *Theorie der Elementartheiler Linearen inttegralgleichungen.* (Mat. Ann. Bd. 69)

G. Lauricella, *Sull equazione integrale di prima specie*, etc. (Atti Lincei).

P. Lévy, *Sur les équations intégrales non linéaires.* (C. R. Paris, 150).

J. Marty. *Sur une équation intégrale.* (C. R. Paris, 150).

Id., *Développement suivant certaines solutions singulières.* (C. R. Paris, 150).

Id., *Existence des solutions pour certaines équations de Fredholm.* (C. R. Paris, 150).

Id., *Valeurs singulières d'une équation de Fredholm.* (C. R. Paris, 150).

E. Picone, *Sopra un equazione integr. di prima specie a limiti variabili.* (Atti Lincei) et *deux autres mémoires.* (Rendiconti Palermo).

E. Picard, *Sur une classe de fonctions fondamentales et sur certains dév. en séries.* (Ann. Ec. Norm., 21).

Id., *Un théorème général sur certaines équations intégrales de troisième espèce.* (C. R. Paris, 150).

Id., *Sur une équation fonctionnelle singulière du type Fredholm.* (C. R. 151).

M. Plancherel, *Sur la reprise d'une fonction arbitraire par une intégr définie.* (C. R. Paris, 150) et *d'autres travaux.* (Math. Ann. et Rend. Palermo).

H. Poincaré, *Remarques diverses sur l'équation de Fredholm.* (Acta Mat., 33 et Assoc. Franc Av. Sc. Congrès de Lille).

W. Stekloff, *Sur le développement d'une fonction arbitraire en série de fonctions fondamentales.* (C. R. Paris, 150).

Id., *Une application nouvelle de ma méthode de développement des fonctions fondamentales.* (C. R. Paris, 150).

Id., *Sur la condition de fermeture des systèmes de fonctions orthogonales.* (C. R. Paris, 150).

V. Volterra, *Questioni generali sulle equazioni integrali ed integro-differenziali.* (Atti Lincei).

Id., *Osservazioni sulle equazioni integro-differenziali ed integrali.* (Atti Lincei).

Id., *Sopra le funzioni permutabili.* (Atti Lincei).

1911. J. Horn. *Volterrasche Integralgleichungen und Summengleichungen. I Teil.* [Iburn. f. v. u. ang math., 140 (2)].

G. Evans, *Sopra l'equazione integrale di Volterra, con un limite de l'integrale infinito.* (Atti Lincei). Trois notes.

D. T. Egoroff, *Théorème sur les suites mesurables.* (C. R. Paris, 152).

A. Korn, *Sur une classe importante de noyaux asymétriques.* (C. R. Paris, 152 et 153. trois notes).

H. Hahn, *Bericht über die theorie der linearen Integralgleichungen.* (Jahresbericht der deutschen Math. Vereinigung).

T. Lalesco, *Sur une équation intégrale du type Volterra.* (C. R. Paris, 152 et Bull. Sc. Math.).

Id., *L'étude des noyaux résolvants.* (Bull. de la Soc. Math. de France).

Id., *Théorèmes sur les valeurs caractéristiques.* (C. R. Paris, 153).

G. Lauricella, *Sulla resoluzione dell'équazione integrale di prima specie.* (Atti Lincei).

Id., *Sopra i nuclei reiterati.* (Atti Lincei).

A. J. Pell, *Biorth. systems of functions.* (Trans. Ann. Mat. Soc).

Id., *Applications of biorth. syst. of functions to the theory of integr. equations.* (Trans. Ann. Mat. Soc.).

E. Picard, *Un théorème général sur les équations intégrales de troisième espèce.* (C. R. Paris, 152).

Id., *Sur une équation intégrale singulière.* (C. R. Paris, 152).

Id., *Un complément sur un théorème relatif aux équations intégrales de* 3me *espèce*. (C. R. Paris, 153).

Id., *Sur un exemple simple d'équation singulière de Fredholm*, etc. (Ann. Ec. Norm.).

Id., *Sur les solutions continues des équations intégrales de troisième espèce*. (C. R. Paris, 153).

Id., *Sur les équations intégrales de troisième espèce* (Ann. Ecole Normale).

L. Sinigaglia, *Sulle funzioni permutabili di 2a specie* (Atti Lincei).

V. Volterra, *Equazioni integro-diff. con limiti constanti*. (Atti Lincei).

Id., *Contributo allo studio delle funzioni permutabili* (Atti Lincei).

Id., *Sopra le funzioni permutabili di* 2a *specie* (Atti Lincei).

H. Weyl, *Die Vertheilung der Eigenwerte*. (Gött. Nachrichten).

TABLE DES MATIÈRES

PREMIÈRE PARTIE

L'équation de Volterra

DEUXIÈME PARTIE

CHAPITRE PREMIER

L'équation de Fredholm

CHAPITRE II

L'étude approfondie du noyau résolvant

CHAPITRE III

Noyaux spéciaux

CHAPITRE IV

L'équation de Fredholm de première espèce

TROISIÈME PARTIE

—

Les équations singulières

Saint-Amand (Cher). — Imprimerie BUSSIÈRE

